Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
IX FINALE NAZIONALE
(9 maggio 2026)

SOLUZIONI

1. QUESTA È BERK [1440] (Carlo Càssola)

Se α è l'angolo interno del poligono, allora $\alpha = 719(180-\alpha)$ da cui si ottiene che $\alpha = \frac{719 \cdot 180}{720}$. Un poligono regolare di n lati ha l'angolo interno che misura $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$. Uguagliando le due espressioni trovate otteniamo $\frac{(n-2)\cdot \cancel{180}}{n} = \frac{719 \cdot \cancel{180}}{720}$ che risolta permette di ottenere $n = 1440$.

2. HICCUP [5063] (Simone Bertone)

Supponiamo di aver usato esattamente 2025 cifre uguali per ogni possibile cifra. I numeri scritti dovranno essere $\frac{2025 \cdot 10}{4} = 5062,5$. Questo ci dice che al 5063-esimo numero avremo almeno una cifra scritta 2026 (o più) volte.

3. SOTTO ATTACCO [2592] (Lorenzo Mazza)

$2^{20} + 2^{14} + 2^x = \left(2^a + 2^b\right)^2$ vuol dire che ciascuno dei termini può essere sia uno dei quadrati che il doppio prodotto.

Determiniamo tutti i possibili valori per x.

Se 2^x è il doppio prodotto allora $2^{20} + 2^{14} + 2^x = \left(2^{10} + 2^7\right)^2$ e quindi $x = 18$.

Se 2^{14} è il doppio prodotto allora $2^{20} + 2^{14} + 2^x = \left(2^{10} + 2^3\right)^2$ e quindi $x = 6$.

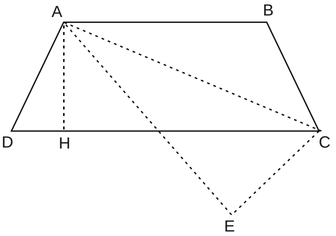
Se 2^{20} è il doppio prodotto allora $2^{20} + 2^{14} + 2^x = \left(2^7 + 2^{12}\right)^2$ e quindi $x = 24$.

4. FURIA BUIA [240] (Sandro Campigotto)

I numeri cercati posso essere del tipo $\overline{ABC}$ con cifre tutte diverse oppure $\overline{ABA}$ con la cifra delle centinaia e quella delle unità tra loro uguali.

Per $\overline{ABC}$ ci basta scegliere le 3 cifre da un insieme di 10, mettere la cifra più alta al posto delle decine e ordinare poi le altre due cifre in uno dei due modi possibili: $\binom{10}{3} \cdot 2 = 240$. Così facendo, però, abbiamo contato anche numeri del tipo $\overline{0BC}$. Sostituendo lo 0 con la cifra C avremo anche tutti i numeri del tipo $\overline{ABA}$. La risposta è 240.

5. A CACCIA DELLA FURIA BUIA [5091] (Santina de Monte)



Tracciamo la diagonale AC e sia AH l'altezza mandata da A sulla base DC.

Osserviamo che applicando più volte il Teorema di Pitagora abbiamo:

$$AE^2 = AC^2 - EC^2 = AC^2 - AD^2 = AH^2 + HC^2 - \left(AH^2 + DH^2\right) =$$

$$= HC^2 - DH^2 = 5,4^2 - 1,8^2 = 25,92 \text{ km}^2$$

$$AE = \sqrt{25,92} \cdot 1000 \text{ m} = \sqrt{2592} \cdot 100 = 3600\sqrt{2} \cong 5091 \text{ m}.$$

6. UN INCONTRO DECISIVO [51] (Simona Pieri)

Abbiamo 4 numeri congrui a 1 modulo 3 e solo 3 congrui a 0 e a 2. Non occupiamoci per il momento dei multipli di 3. Gli altri 7 numeri dovranno essere necessariamente ordinati (indicati per congruenza) 1121212. I numeri congrui a 0 possiamo metterli ovunque, anche ripetuti, basta che non sia al primo posto.

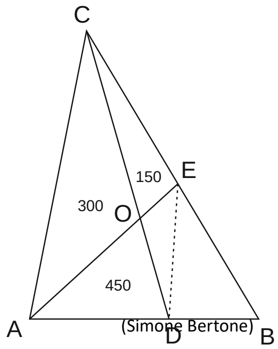
La probabilità cercata è quindi: $P = \frac{4! \cdot 3! \cdot C^*_{7,3} \cdot 3!}{10!} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 84 \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{50}$.

La risposta richiesta è $1 + 50 = 51$

7. IL CIMENTO DELLA FIAMMA [674] (Matteo Salicandro)

Scrivendo un polinomio con coefficienti tutti uguali a 6 e utilizzando solamente le potenze pari possiamo ottenere tutti i multipli di 6. Il multiplo di 6 più vicino a 2026 è $2028 = 338 \cdot 6$. Possiamo costruire il polinomio $p(x) = 6x^{674} + 6x^{672} + \ldots + 6x^2 + 2x + 6$ che realizza quanto richiesto con il minimo grado possibile.

8. RIPARARE LA CODA [3600] (Michelangelo Sabatini)



Tracciamo il segmento DE. Possiamo determinare subito l'area del triangolo DOE: $\frac{A_{DOE}}{A_{ADO}} = \frac{A_{COE}}{A_{AOC}}$ da cui otteniamo $A_{DOE} = 225\ \text{cm}^2$. Ora, detta $x = A_{DEB}$ osserviamo che $\frac{A_{ACD}}{A_{DCB}} = \frac{A_{AEB}}{A_{EBD}}$. Sostituendo i valori noti otteniamo: $\frac{750}{375+x} = \frac{675}{x}$ equazione che risolta porta a determinare $x = 3375\ \text{cm}^2$.
Il quadrilatero $ODBE$ ha area $A_{ODBE} = 225 + 3375 = 3600\ \text{cm}^2$.

9. A CACCIA DEL NIDO [1210] (Simone Bertone)

Supponiamo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcoliamo il polinomio nel valore indicato:
$p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3 + b\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 + c\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + d$. Osserviamo che il secondo termine genera il termine $2\sqrt{6}$. Non compaiono altre $\sqrt{6}$ da altre parti, quindi $b = 0$.
$p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = a\left(2\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right) + c\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + d$. Per la stessa ragione anche $d = 0$ non essendoci termini interi.
$a\left(11\sqrt{2}+9\sqrt{3}\right) + c\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$, quindi $\begin{cases} 11a + c = 0 \\ 9a + c = 2 \end{cases}$ da cui segue $a = -1$ e $c = 11$. $p(x) = -x^3 + 11x$.
Il valore richiesto è $p(-11) = 11^3 - 11^2 = 1331 - 121 = 1210$.

10. IL BIZIPPO [15] (Lorenzo Mazza)

Il problema è equivalente a trovare il più grande n per cui $\frac{n(n+1)}{2(n+5)}$ è un numero intero. Riscrivendo la frazione in maniera diversa con un po' di furbizia, oppure eseguendo la divisione tra i due polinomi: $\frac{1}{2}\frac{n^2+5n-5n+n}{n+5} = \frac{1}{2}n + \frac{-2n-10+10}{n+5} = \frac{1}{2}n - 2 + \frac{10}{n+5}$.
$n+5$ è un divisore di 10 nel caso n sia pari, $n+5$ è un divisore di 20 nel caso n sia dispari
Il valore più grande si ottiene per $n = 15$.

11. A SELLA DI DRAGO [5467] (Matteo Salicandro)

Limitiamoci a calcolare la somma delle prime 1000 parentesi: $(1+0+0-0)+(1+0+0-1)+(1+0+0-2)+...+(1+9+9-9)$.
Osserviamo che le cifre compaiono in ugual numero nella posizione delle decine e delle unità e quindi la loro somma è 0. Nella posizione delle migliaia abbiamo sempre 1 mentre in quella delle centinaia compaiono tutte le cifre, ciascuna 100 volte. La somma vale $1000 + 45 \cdot 100 = 5500$.
Calcoliamo ora la somma delle ultime 27 parentesi: $(2+0+0-0)+(2+0+0-1)+(2+0+0-2)+...+(2+0+2-6)$.
$27 \cdot 2 = 54$ per le migliaia, 0 per le centinaia, $1 \cdot 10 + 2 \cdot 7 = 24$ per le decine e infine $45 + 45 + 21 = 111$ per le unità.
La soluzione richiesta è $5500 + 54 + 24 - 111 = 5467$.

12. CONOSCERE I DRAGHI [35] (Claudia Manotti)

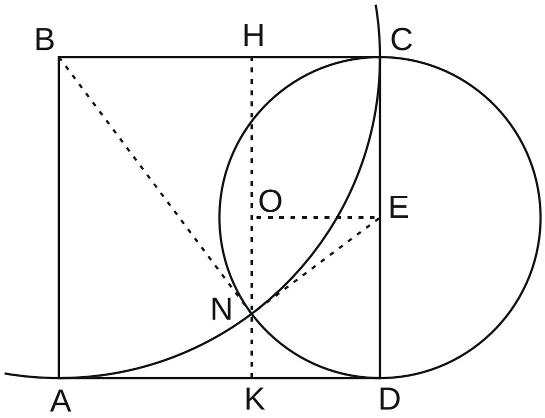
L'angolo al centro che si forma utilizzando una delle corde percorse dal drago e i due raggi della circonferenza, misura $180° - 10° = 170°$. Il numero di corde n che servono per costruire il percorso che parte dalla tana e, riflettendosi sulla circonferenza lo riporta alla tana sono tante quante $170° \cdot n = 360° \cdot k$, cioè $17n = 36k$ con k intero. Essendo 17 primo, avremo $n = 36$. La risposta richiesta è 35 in quanto non dobbiamo considerare l'ultimo rimbalzo, visto che il drago rientra nella tana.

13. UN GIRO SUL DRAGO [1049] (Michelangelo Sabatini)

Risolviamo il problema in maniera generale. Siano v_1 e v_2 le due velocità in gioco, e sia s la lunghezza del percorso.
Nel primo giro abbiamo che $s = v_1 \frac{t_1}{2} + v_2 \frac{t_1}{2}$ da cui otteniamo $t_1 = \frac{2s}{v_1 + v_2}$.
Nel secondo giro abbiamo $t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_1} + \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = \frac{s}{2}\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$.
Il rapporto richiesto è $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{2\cancel{s}}{v_1+v_2}}{\frac{\cancel{s}}{2}\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}} = \frac{4 v_1 v_2}{(v_1+v_2)^2}$.
Nel caso del nostro problema abbiamo $\frac{t_1}{t_2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 26}{(20+26)^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 26}{46^2} = \frac{20 \cdot 26}{23^2} = \frac{520}{529}$.
La soluzione richiesta è $520 + 529 = 1049$.

14. MORTE ROSSA [240] (Michelangelo Sabatini)

Sia $BC = BN = 2x$ e di conseguenza sia $CE = EN = x$. Detto $HC = y$, possiamo applicare il Teorema di Pitagora ai triangoli BNH e NOE:



$$\begin{cases}(2x)^2-(2x-y)^2=(2x-48)^2\\ y^2=x^2-(x-48)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}4xy-y^2=4x^2-192x+48^2\\ y^2=96x-48^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}4xy-96x\cancel{+48^2}=4x^2-192x\cancel{+48^2}\\ y^2=96x-48^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x-24\\ (x-24)^2=96x-48^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x-24\\ x^2-144x+2880=0\end{cases}$$

L'ultima equazione ha soluzioni $x=24$ (da scartare perché $y \neq 0$) e $x=120$.
La distanza cercata è $2x = 240 \text{ km}$.

15. IL GIORNO DELLO STERMINATORE [20] (Lorenzo Mazza)

<u>Prima Soluzione</u>

Il problema è equivalente a sommare tutti i numeri $1 \le n \le 99$ che sono primi con 100 e darne il risultato diviso per 100.
Siccome $100 = 2^2 \cdot 5^2$, calcoliamo prima la somma S_2 di tutti i multipli di 2: $S_2 = 2+4+6+...+98 = 2\cdot(1+2+3+...49) = 2450$; ora calcoliamo la somma S_5 dei multipli di 5: $S_5 = 5+10+15+...+95 = 5\cdot(1+2+3+...19) = 950$.
Gli elementi comuni alle due somme sono i multipli di 10: $S_{10} = 10+20+30+...+90 = 10\cdot(1+2+3+...+9) = 450$

Siccome la somma S dei numeri tra 1 e 99 vale $S = \dfrac{99\cdot 100}{2} = 4950$, il risultato richiesto è:

$$\frac{S-S_2-S_3+S_{10}}{100} = \frac{4950-2450-950+450}{100} = 20.$$

<u>Seconda Soluzione</u>

Osserviamo che per ogni $1 \le n \le 99$ vale l'uguaglianza $MCD(n,100) = MCD(100-n,100)$. Dunque, se la frazione $\dfrac{n}{100}$ è irriducibile, è irriducibile anche $\dfrac{100-n}{100}$. Quindi è sufficiente contare il numero di interi coprimi con 100 e dividere per 2 per trovare avere la somma di tutte le frazioni complementari, visto che ciascuna di queste coppie di frazioni ha somma 1. Siccome $\phi(100) = 40$, la risposta è $\dfrac{\phi(100)}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$.

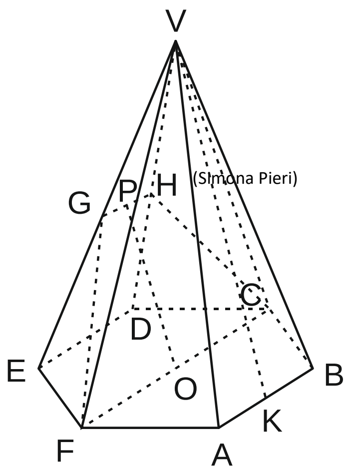
16. IN AIUTO DI HICCUP [761] (Matteo Salicandro)

Riscriviamo la condizione in maniera diversa: $a^2-4b^2-a+2b=2026$ che possiamo fattorizzare $(a-2b)(a+2b)-(a-2b)=2026$ e quindi $(a-2b)(a+2b-1)=2026$. Siccome $2026 = 2\cdot 1013$ non abbiamo molte possibilità da controllare:

$\begin{cases}a-2b=x_1\\ a+2b-1=x_2\end{cases}$ da cui otteniamo $\begin{cases}a=\dfrac{x_1+x_2+1}{2}\\ b=\dfrac{x_2-x_1+1}{4}\end{cases}$. L'unico caso possibile si ha per $x_1 = 1013$ e $x_2 = 2$

che ci restituisce le soluzioni $(508; 253)$. In tutti gli altri casi le soluzioni o non sono intere o sono negative.
La risposta richiesta è $508+253=761$.

17. IL NIDO [210] (Simona Pieri)



Riferendoci alla figura a fianco, si può osservare che la sezione della piramide è un trapezio isoscele passante per i punti medi degli spigoli VE e VD. Sappiamo che $GH = 7 \text{ m}$; $CF = 28 \text{ m}$.

$$PO = \frac{1}{2}VK = \frac{1}{2}\sqrt{25^2-7^2} = 12 \text{ m}.$$

L'area cercata vale $A_{FCHG} = \dfrac{(7+28)\cdot 12}{2} = 210 \text{ m}^2$

18. TUTTI IN GROPPA A UN DRAGO [3236] (Santina de Monte)

Utilizzando le formule di Viete su $f(x)$ abbiamo: $rst = 1$; $rs + rt + st = b$ e $r + s + t = -a$

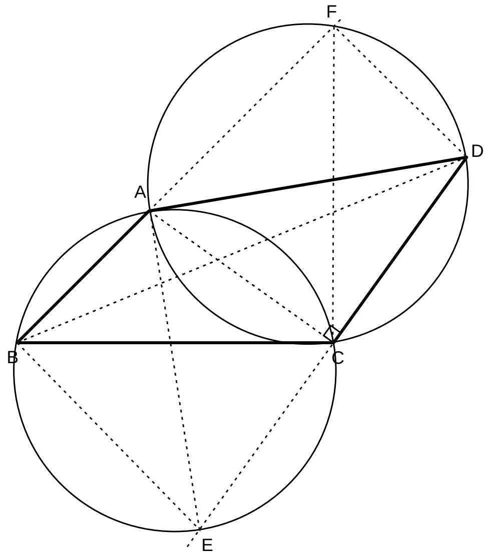
Calcoliamo i coefficienti di $g(x)$: $p = -r^2s^2t^2 = -(rst)^2 = -1$; $n = r^2s^2 + r^2t^2 + s^2t^2 = (rs+rt+st)^2 - 2rst(r+s+t) = b^2 + 2a$;
$m = -(r^2+s^2+t^2) = -(r+s+t)^2 + 2(rs+rt+st) = -a^2 + 2b$.

Abbiamo quindi $g(x) = x^3 + (-a^2+2b)x^2 + (b^2+2a)x - 1$. Per la condizione assegnata
$g(-1) = -1 - a^2 + 2b - b^2 - 2a - 1 = -5$ da cui possiamo scrivere $(a+1)^2 + (b-1)^2 = 5$.

L'ultima equazione rappresenta una circonferenza che ha il valore massimo per $b = 1 + \sqrt{5} \cong 3,236$.

Il risultato richiesto è 3236.

19. IL COLPO DECISIVO [169] (Simona Pieri)



Prima soluzione

Tracciamo la circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia E il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta CD. $ABEC$ è ciclico e quindi $A\hat{E}C = A\hat{B}C = 45°$. Allora anche $E\hat{A}C = 45°$ e quindi AE è il diametro della circonferenza, $A\hat{B}E = 90°$ e, siccome AED è isoscele, $AE = AD$.

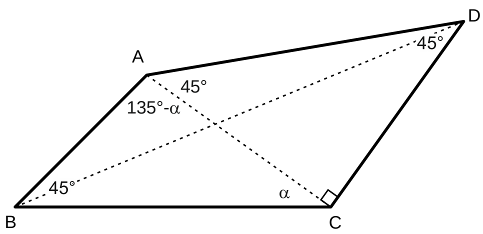
Tracciamo ora la circonferenza circoscritta al triangolo ACD e sia F l'intersezione tra la circonferenza e la retta AB. Ragionando come prima abbiamo che BCF è un triangolo rettangolo isoscele.

ABE e AFD sono due triangoli rettangoli congruenti. Infatti $AE = AD$ e $B\hat{E}A = B\hat{C}A = 90° - A\hat{C}F = 90° - A\hat{D}F = F\hat{A}D$.

Quindi $FD = AB = 100$ m e quindi:

$$BC = \frac{BF}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{260^2 - 100^2}}{\sqrt{2}} = \frac{240}{\sqrt{2}} = 120\sqrt{2} \text{ m} \cong 169,704 \text{ m}\cdot$$

Seconda soluzione



Sia $AB = a$, sia $BD = b$, sia $AC = CD = x$ e sia $A\hat{C}B = \alpha$.

Dalle informazioni sul problema abbiamo $AD = x\sqrt{2}$ e $B\hat{A}C = 135° - \alpha$.

Per il Teorema del coseno applicato al triangolo ABD abbiamo

$b^2 = a^2 + 2x^2 + 2\sqrt{2}ax\cos\alpha$ da cui otteniamo $\cos\alpha = \dfrac{b^2 - a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}ax}$.

Per il Teorema dei seni applicato al triangolo ABC abbiamo

$\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ da cui otteniamo $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2x}$.

Per il Teorema del coseno applicato al triangolo ABC abbiamo:

$BC^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos(135° - \alpha)$ che possiamo scrivere

$$BC^2 = a^2 + x^2 - 2ax\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)$$

$BC^2 = a^2 + x^2 + \sqrt{2}ax(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$. Sostituendo quanto abbiamo ricavato prima otteniamo

$$BC^2 = a^2 + x^2 + \sqrt{2}ax\left(\frac{b^2 - a^2 - 2x^2}{2\sqrt{2}ax} - \frac{a\sqrt{2}}{2x}\right)$$

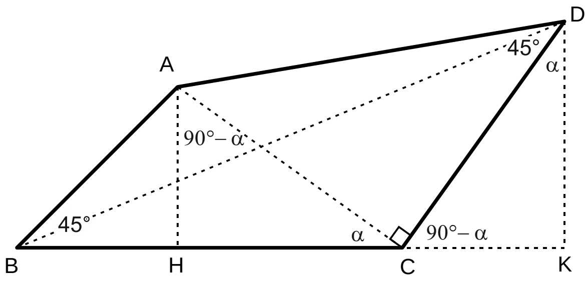
$$BC^2 = \cancel{a^2} + \cancel{x^2} + \frac{b^2 - a^2 - \cancel{2x^2}}{2} - \cancel{a^2}$$

$BC^2 = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$ da cui abbiamo $BC = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{2}}$ che nel nostro caso vale $BC = \sqrt{\dfrac{260^2 - 100^2}{2}} = 120\sqrt{2} \text{ m} \cong 169,704 \text{ m}\cdot$

Terza soluzione

Tracciamo le perpendicolari a BC sia da A che da D e siano H e K i piedi di tali perpendicolari.

Sia $\alpha = C\hat{D}K$. Per costruzione risulta $H\hat{D}A = \alpha$. Siccome $AC = CD$, i due triangoli ACH e CKD risultano congruenti.



Sia $HC = DK = x$. Siccome $AH = BH = CH = 50\sqrt{2}$, possiamo utilizzare il Teorema di Pitagora sul triangolo BDK:

$BK^2 + DK^2 = BD^2$

$\left(100\sqrt{2} + x\right)^2 + x^2 = 260^2$ che ci porta all'equazione di secondo grado

$x^2 + 100\sqrt{2}x - 23800$ che ha come unica soluzione accettabile $x = 70\sqrt{2}$.

$BC = 120\sqrt{2}\ \mathrm{m} \cong 169,704\ \mathrm{m}$

20. UN LIETO FINE [117] (Simona Pieri)

Si tratta di calcolare $\frac{18!}{3!} \bmod 9 \cdot 19$, cioè $\frac{18 \cdot 17!}{6} \bmod 9 \cdot 19$ e quindi $9 \cdot \frac{17!}{3} \bmod 9 \cdot 19$. Ci basta calcolare quindi $\frac{17!}{3} \bmod 19$ e moltiplicare il risultato per 9. Per il Teorema di Wilson $18! \bmod 19 \equiv -1$. Siccome $18! = 18 \cdot 17! \equiv_{19} -1 \cdot 17!$, ne segue che $17! \equiv_{19} 1$.

L'ultima fatica è determinare $\frac{1}{3} \bmod 19$ che è l'inverso moltiplicativo di 3 modulo 19, cioè quel numero k tale che $3k \equiv 1 \bmod 19$ che si determina facilmente in $k = -6$ o meglio $k = 13$.

La soluzione cercata è $13 \cdot 9 = 117$.

21. QUESTA È LA NUOVA BERK [3402] (Sandro Campigotto)

Dividiamo due casi.

Non utilizziamo la cifra "0".

Una volta scelti 5 numeri su 9 disponibili, guardiamo dove possiamo posizionare i due più grandi. Supponiamo di aver scelto $1-2-3-4-5$. Se posizioniamo $\boxed{}\boxed{4}\boxed{}\boxed{5}\boxed{}$ o viceversa, abbiamo $2 \cdot 3!$ possibilità visto che qualunque scelta rispetta i vincoli.

Se invece posizioniamo $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ allora nella quarta casella dovrà andare necessariamente il "3" e ci restano 2 possibilità di ordinare le ultime due cifre.

Anche se posizioniamo $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}\boxed{4}$ avremo 2 sole possibilità di concludere. $16 \cdot \binom{9}{5}$ numeri possibili.

Utilizziamo la cifra "0".

Una volta scelti i 4 numeri mancanti su 9 disponibili vediamo come il ragionamento precedente deve essere modificato. Supponiamo di aver scelto $0-2-3-4-5$. Se posizioniamo $\boxed{}\boxed{4}\boxed{}\boxed{5}\boxed{}$, non potendo mettere lo "0" in prima posizione ci rimangono $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ possibilità. Se invece posizioniamo $\boxed{4}\boxed{5}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ ci rimangono le 2 possibilità di concludere. Posizionando $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}\boxed{4}$ avremo 1 sola possibilità per chiudere il numero. In totale $(8+2+1) \cdot \binom{9}{4}$ numeri possibili.

Abbiamo $16 \cdot \binom{9}{5} + 11 \cdot \binom{9}{4} = 27 \cdot \binom{9}{4} = 27 \cdot 126 = 3402$ numeri possibili.