Università di Genova

Progetto Olimpiadi della Matematica

Unione Matematica Italiana — Ministero dell'Istruzione e del Merito

Istruzioni Generali

- Per rispondere a un problema([1]) occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con 10^4; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  a) la *parte intera* di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x; si scrive $\lfloor x \rfloor$—ad esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\left\lfloor \sqrt{17} \right\rfloor = 4$;
  b) il *successivo* del numero intero n è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti *consecutivi*;
  c) il *fattoriale* del numero intero n è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n; si scrive $n!$—ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
  d) un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  e) una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio `radar` è palindroma; `drone` non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\qquad$ $\sqrt{3} = 1{,}7321$ $\qquad$ $\sqrt{5} = 2{,}2360$ $\qquad$ $\pi = 3{,}1415$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata attraverso il modulo di consegna.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani attraverso il canale previsto.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

BUON

DIVERTIMENTO!

([a]) L'autore di un problema è indicato prima del testo.

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi

1. Tizio, Caio e Sempronio *Edi Rosset*

Tre amici, Tizio, Caio e Sempronio, percorrono lo stesso sentiero in un numero intero di passi, anche se la lunghezza dei loro passi non è la stessa. Caio fa 3 passi ogni 4 passi di Tizio. Il passo di Sempronio è il 15% più corto di quello di Tizio. Inoltre il numero di passi che Caio deve fare per completare il percorso è il minimo possibile. Quanti passi vengono fatti complessivamente dai tre amici per percorrere il sentiero?

2. Regali *Benedetta Demoro*

Un numero è ***regale*** quando verifica le due condizioni

a) è un numero che si ottiene prendendo un numero palindromo di quattro cifre e aggiungendo 1 sia alla cifra delle unità sia a quella delle decine;
b) le quattro cifre sono quattro numeri consecutivi.

Ad esempio, 1342 è un numero regale, 1452 non è un numero regale. Qual è il più grande numero regale?

3. Nel salone *Andrea Macco*

In un salone dei ricevimenti, il pavimento è un semplice mosaico, costituito da una scacchiera di 99×99 piastrelle quadrate, tutte di marmo di Carrara ad eccezione di quelle sul bordo e sulle due diagonali. Quante sono le piastrelle di marmo di Carrara nel mosaico?

4. Esagoni e ottagoni *Sandro Campigotto*

Due esagoni regolari $ABCDEF$ e $GFEJIH$ hanno in comune il lato EF. L'area dell'ottagono $ABCDJIHG$ è $1372\,\text{cm}^2$. Qual è l'area del rettangolo $ADJG$?

5. I corridori *Lorenzo Mazza*

Due corridori corrono su un percorso circolare lungo 550 m per un'ora. Partendo dallo stesso punto e allo stesso istante, il primo si muove alla velocità costante di 8 km/h, il secondo alla velocità costante di 6 km/h. Quante volte si incontrano (escluso alla partenza), se corrono in versi opposti?

6. Nel cono *Edi Rosset*

Maria fa cadere una biglia di raggio 5 mm in un contenitore a forma di cono. La distanza dal vertice del cono di un punto in cui la biglia è tangente al cono è 12 mm. Maria fa cadere nel contenitore una seconda biglia che si ferma tangente sia alla biglia già inserita sia alla parete del cono in più di un punto. Qual è il raggio della seconda biglia? [*Dare come risposta la misura del raggio in* mm *moltiplicato per 100.*]

7. Piastrelle *Andrea Macco*

Ci sono otto piastrelle in riga: due di queste hanno disegnato sopra il numero 1; due il numero 2; due il numero 3; le ultime due il numero 4. Due piastrelle con lo stesso numero k sono separate esattamente da k piastrelle (le due piastrelle con il numero k sono escluse). La prima piastrella da sinistra ha disegnato un numero più grande di quello disegnato sull'ultima da sinistra. Qual è la disposizione in riga delle piastrelle? [*Dare come risposta i numeri sulle prime 4 piastrelle da sinistra.*]

8. L'ombra del cubo *Benedetta Demoro*

Un cubo produce un'ombra a forma di esagono. Chiara nota che l'esagono si ottiene accostando lungo le loro basi maggiori due trapezi isosceli uguali di lati obliqui lunghi come lo spigolo del cubo. Chiara nota anche che l'angolo tra due lati obliqui è retto. Infine misura il perimetro dell'esagono: questo è uguale al perimetro del cubo—cioè la somma di tutti i suoi spigoli. Calcola poi l'area dell'esagono e il volume del cubo e nota che i loro valori, espressi in m^2 e m^3, sono uguali. Quanto misura il lato del cubo in mm?

9. Alle finali *Lorenzo Mazza*

Gli organizzatori delle finali a squadre, a Cesenatico, acquistano per i concorrenti delle bottigliette di acqua, dei libri e delle caramelle, per un totale di 130 pezzi, pagando 130 euro. Due caramelle costano 0,75€, ciascuna bottiglietta d'acqua costa 1€ e ciascun libro costa 10€. Quante bottigliette di acqua sono state acquistate?

10. Diagonali
Andrea Macco

Se si tracciano le diagonali di un trapezio isoscele si possono individuare, in tutto, 8 differenti triangoli. Se invece si utilizza un pentagono regolare, quanti differenti triangoli si individuano avendo tracciato tutte le diagonali?

11. Primi e perfetti
Lorenzo Mazza

Quanti numeri primi minori di 200 possono essere scritti come somma di due quadrati perfetti?

12. Il foglio piegato
Lorenzo Mazza

Un foglio rettangolare $ABCD$ è piegato, portando il vertice C sul vertice A, lungo il segmento HK dove H è un punto su AB e K è un punto su CD. La regione del foglio non sovrapposta (costituita da due triangoli) ha una superficie uguale al 25% della superficie iniziale del foglio. Qual è il rapporto fra l'area del quadrato costruito sul segmento AB e l'area del quadrato costruito sul segmento BC?
[*Dare come risposta moltiplicato per* 1000.]

13. Le cisterne
Andrea Macco

Due cisterne uguali sono completamente piene di acqua. Ognuna di esse è fornita di due rubinetti: uno grande e uno piccolo. Da ciascuno di essi l'acqua fluisce in modo costante. Se si apre soltanto il rubinetto grande la cisterna si svuota in 30 minuti; se si apre solo quello piccolo la cisterna si svuota in un'ora. Si aprono contemporaneamente il rubinetto grande di una cisterna e il rubinetto piccolo dell'altra cisterna. Appena una delle due cisterne si è svuotata, allora si apre anche il secondo rubinetto della cisterna ancora parzialmente piena. Quanti secondi dall'apertura iniziale trascorrono fino ad avere entrambe le cisterne vuote?

14. Il prodotto
Lorenzo Mazza

Cecilia svolge il prodotto di tre numeri interi positivi distinti e scopre che vale 11200. Sapendo che il più grande è 20 volte il più piccolo, qual è la somma dei tre fattori usati da Cecilia?

15. Sulla lavagna
Andrea Macco

Pietro disegna un quadrato sulla lavagna e un punto al suo interno. «Se congiungo questo punto con tutti i vertici si formano quattro triangoli.» Tutti annuiscono. Pietro, indicando uno dei 4 triangoli, dice: «L'area di questo triangolo vale 500 cm^2 e nessuno degli altri ha area più grande di questo.» Tutti prendono nota; Pietro indica un altro triangolo: «L'area di questo triangolo vale 148 cm^2 e nessuno degli altri ha area più piccola di questo.» Quanto vale, in centimetri, il lato del quadrato disegnato inizialmente sulla lavagna?

16. La pesca
Sandro Campigotto

In un sacchetto sono presenti i numeri da 1 a 20. Luca pesca un numero, quindi Claudia ne pesca un altro. Qual è la probabilità che il prodotto dei due numeri estratti sia un quadrato perfetto?
[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10000.*]

17. Nel duemilaventicinque
Leonardo Cimino

Quante sono le quadruple ordinate (a, b, c, d) di numeri naturali tali che il loro prodotto faccia 2025 e che il massimo comun divisore dei quattro numeri a, b, c e d sia 1?

18. Il cubo tagliato
Sandro Campigotto

Tagliando un cubo di spigolo 20 cm con un piano che passa per due vertici opposti di una faccia e per i punti medi di due spigoli adiacenti della faccia opposta, si ottiene un quadrilatero. Qual era l'area del quadrilatero?

19. Una coda lunga
Lorenzo Mazza

Un quadrato perfetto ha ***coda*** n se le sue ultime n cifre sono tutte uguali fra loro e diverse da zero. Ad esempio, $8^2 = 64$ ha coda 1. Qual è il valore massimo che può assumere n?

20. Imperfetti
Sandro Campigotto

Un numero intero positivo si dice ***imperfetto*** se né esso né il suo doppio sono divisibili per nessun quadrato perfetto maggiore di 1. Quanti sono i numeri imperfetti minori di 1000?

21. Il mazzo di carte
Edi Rosset

Si consideri un mazzo di 40 carte da gioco (numerate da 1 a 10 per ognuno dei 4 semi, cioè fiori, quadri, cuori e picche). Sia p_1 la probabilità che, estraendo 10 carte dal mazzo, risultino estratti tutti i numeri da 1 a 10. Sia p_2 la probabilità che, estraendo 12 carte dal mazzo, risultino estratti tutti i numeri da 1 a 10. Qual è il rapporto $\frac{p_2}{p_1}$? [*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

Gara di matematica a squadre femminili 2025
Soluzioni

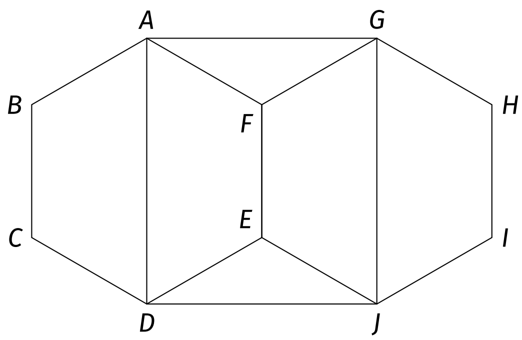
Università di Genova

Soluzione del problema 1. Siano T, C, S il numero di passi di Tizio, Caio, Sempronio, rispettivamente. Deve essere $C = \frac{3}{4}T$, $S = \frac{100}{85}T = \frac{20}{17}T$. Quindi T, $\frac{3}{4}T$ e $\frac{20}{17}T$ sono numeri interi, da cui segue che T deve essere il minimo comune multiplo di 4 e di 17, cioè 68. Perciò $C = 51$ e $S = 80$.
La risposta è 0199.

Soluzione del problema 2. I numeri che si ottengono aggiungendo 1 alle cifre delle decine e delle unità di un numero palindromo sono numeri divisibili per 11, poiché i palindromi di quattro cifre sono necessariamente multipli di 11. Le due cifre a e b diverse del numero palindromo che genera un numero regale devono essere tali che $|a - b| = 2$. I più piccoli numeri regali sono 1342 e 2013. Tutti gli altri si ottengono sommando un multiplo di 1111 a questi. I più grandi numeri regali sono 6457, 6897, 7568 e 8679.
La risposta è 8679.

Soluzione del problema 3. Sul bordo ci sono $2(99+97) = 392$ piastrelle. Sulle diagonali ci sono $97+96 = 193$ piastrelle.
La risposta è 9216.

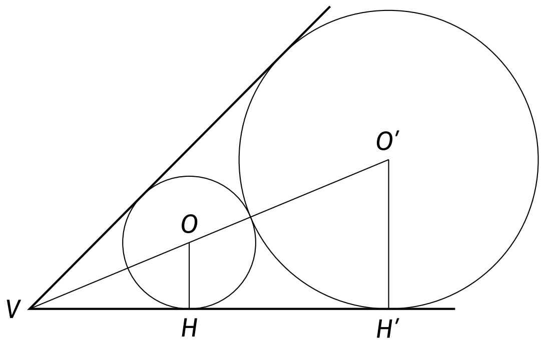
Soluzione del problema 4. L'area dell'ottagono $ABCDJIHG$ è la somma di 14 triangoli equilateri di lato uguale a quello degli esagoni.



L'area del rettangolo $ADJG$ è la somma di 8 triangoli equilateri di lato uguale a quello degli esagoni. La risposta è 0784.

Soluzione del problema 5. La differenza (vettoriale) delle velocità è 14 km/h. Dato che $\frac{14000}{550} = 25{,}45$, si incontrano 25 volte.
La risposta è 0025.

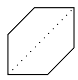
Soluzione del problema 6. In una sezione del cono con un piano passante per il suo asse, siano V il vertice del cono, O il centro della prima biglia, $r = 5\,\text{mm}$ il suo raggio, H un punto di tangenza con il cono dove $l = \overline{VH} = 12\,\text{mm}$, e $d = \overline{OV} = \sqrt{r^2 + l^2} = 13\,\text{mm}$. Similmente, siano O' il centro della seconda biglia, r' il suo raggio, H' un punto di tangenza con il cono e $d' = \overline{O'V}$.



I triangoli OVH e $O'VH'$ sono simili, in particolare $r' : r = d' : d$. Si ha inoltre $d' = d + r + r'$. Si ricava così $r' = \frac{r(d+r)}{d-r}$.
La risposta è 1125.

Soluzione del problema 7. Tra le due piastrelle $\boxed{4}$ devono stare quattro piastrelle. Restano due piastrelle all'esterno. Se una di queste è una piastrella $\boxed{1}$, allora cinque piastrelle in sequenza sono necessariamente $\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{4}\,\boxed{1}\,\boxed{3}$. Ma questa configurazione non lascia possibilità di inserire le piastrelle $\boxed{2}$. Perciò le due piastrelle $\boxed{1}$ sono tra le due piastrelle $\boxed{4}$ e la sequenza deve essere $\boxed{4}\,\boxed{1}\,\boxed{3}\,\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{4}\,\boxed{3}\,\boxed{2}$.
La risposta è 4131.

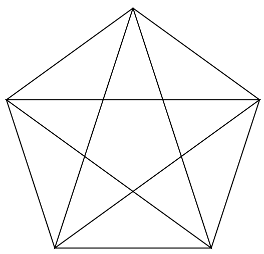
Soluzione del problema 8. L'esagono deve essere della forma



Sia x la lunghezza della base minore dei trapezi. Il volume del cubo è l^3, il perimetro è $12l$; il perimetro dell'esagono è $4l + 2x$, l'area è $\left(l + \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{x^2}{2}$. Dalla condizione che $12l = 4l + 2x$ si ricava che $x = 4l$. Perciò $l^3 = l^2[(1 + 2\sqrt{2})^2 - 8] = l^2(1 + 4\sqrt{2})$.
La risposta è 6656.

Soluzione del problema 9. Indicato il numero di coppie di caramelle, le bottigliette d'acqua e i libri rispettivamente con c, b e l, il costo totale risulta $\frac{3}{4}c + b + l = 130$. D'altro canto, il numero totale di oggetti è uguale a $2c + b + l = 130$. Sottraendo membro a membro, si ottiene $5c = 36l$. Perciò $36 \mid c$. D'altro canto deve essere $1 \le c \le 65$, per cui $c = 36$, $l = 5$ e $b = 130 - 36 \cdot 2 - 5 = 53$. La risposta è 0053.

Soluzione del problema 10. In un pentagono, ogni triangolo formato con le diagonali coinvolge almeno un vertice:



Ciascun triangolo può coinvolgere punti sul perimetro del pentagono oppure sul pentagono interno. Nessun triangolo può essere costruito con tutti i vertici sul pentagono interno perchè le diagonali collegano soltanto vertici sul perimetro.
Fissato ora un vertice sul perimetro, questo fa parte di 1 triangolo con gli altri vertici sul pentagono interno. Inoltre, il vertice fissato sul perimetro, insieme con un vertice sul pentagono interno, escluso quello opposto al vertice sul perimetro, fa parte di 2 triangoli con l'altro vertice sul perimetro. Infine, il

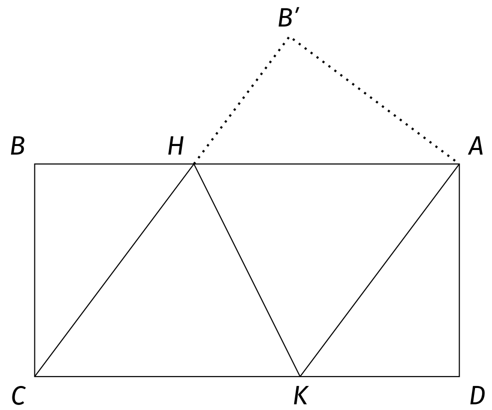
vertice fissato sul perimetro fa parte di 1 triangolo che coinvolge ogni coppia di altri vertici sul perimetro del pentagono. Perciò i triangoli sono $5\left[1 + \frac{8}{2} + \frac{6}{3}\right] = 35$.
La risposta è `0035`.

Soluzione del problema 11. Oltre a $2 = 1^2 + 1^2$, sono richiesti i numeri primi p del tipo $p = m^2 + 4n^2$ con $m = 1 + 2k$ dispari. Perciò $m^2 + 4n^2 = 1 + 4k(k+1) + 4n^2 = 1, 5 (\mathrm{mod} 8)$. Sono 21:

5	13	17	29	37	41	53	61	73	89	97
101	109	113	137	149	157	173	181	193	197	

La risposta è `0022`.

Soluzione del problema 12. Si noti che, per costruzione, $CH = AH$ e $CK = KA$, i due triangoli BCH e $AB'H$ sono uguali e i segmenti $B'C$ e AK sono paralleli—perciò il quadrilatero $AHCK$ è un rombo.

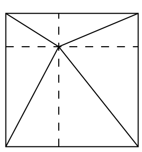


Dato che $CBH = ADK$, si ha che $ADK = \frac{1}{8}ABCD$, così $AHK = \frac{3}{8}ABCD$. I triangoli ADK e AHK hanno la stessa altezza, pertanto $AH : DK = \frac{3}{8} : \frac{1}{8}$, cioè $AH = 3DK$. Applicando il Teorema di Pitagora si ha $AD^2 = AK^2 - DK^2 = (3DK)^2 - DK^2 = 8DK^2$, mentre $CD = DK + KC = DK + AH = 4DK$ da cui $CD^2 = 16DK^2$. Perciò $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{16}{8} = 2$.
La risposta è `2000`.

Soluzione del problema 13. Sia V il volume di ogni cisterna. L'acqua scorre nel rubinetto grande con un flusso di $\frac{V}{30}$, scorre nel rubinetto piccolo con un flusso di $\frac{V}{60}$. Con due rubinetti aperti, il flusso è $\frac{V}{60} + \frac{V}{30} = \frac{V}{20}$. La prima cisterna si svuota in 30 min; in quel momento, l'altra cisterna si è svuotata di $\frac{V}{60}30 = \frac{V}{2}$. Aprendo il rubinetto grande, la cisterna si svuota in altri $\frac{V}{2}\frac{20}{V} = 10$ min.
La risposta è `2400`.

Soluzione del problema 14. Siano $x < y < z$ i tre numeri, con $z = 20x$. Ne consegue che $xyz = 2^2 5x^2y = 11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7$, da cui $x^2y = 2^4 \cdot 5 \cdot 7$. Perciò $x = 2^k$ con $k = 1, 2$. Se $k = 1$, allora $x = 2$ e sarebbe $z = 40 < 140 = y$ che è assurdo. Se $k = 24$, allora $x = 4$, $z = 4 \cdot 20 = 80$ e $y = 35$.
La risposta è `0119`.

Soluzione del problema 15. Sia l il lato del quadrato. I due triangoli con area massima e minima hanno basi su lati opposti del quadrato. Infatti, se così non fosse, si considerino le loro altezze a_1 e b_1, diciamo $a_1 > b_1$; siano a_2 l'altezza del triangolo con base sul lato opposto a quello con altezza a_1 e b_2 l'altezza del quarto triangolo.



Così $a_1 + a_2 = l = b_1 + b_2$. Perciò, $b_2 = l - b_1 > l - a_1 = a_2$, e $a_1 > b_2 > a_2 > b_1$, che è assurdo.
L'area dei due triangoli è $648\,\mathrm{m}^2$ ed è metà dell'area del quadrato.
La risposta è 0036.

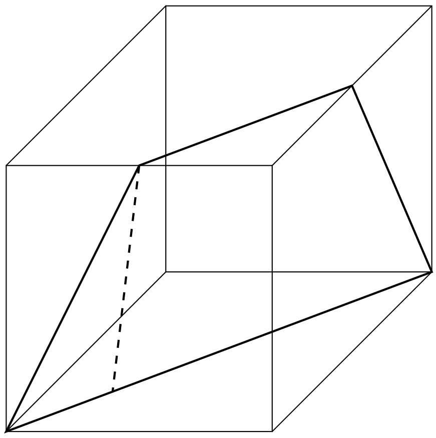
Soluzione del problema 16. I prodotti di due numeri diversi compresi tra 1 e 20 che sono quadrati perfetti sono 42. Coppie di tali numeri, entrambi maggiori o uguali a 10 non ce ne sono: infatti, devono necessariamente non essere primi. Tra i sette numeri che restano, c'è un solo quadrato perfetto, e un solo multiplo di 7, ma anche solo tre multipli di 5 (10, 15 e 20) ma nessuno dei prodotti incrociati è un quadrato perfetto. Il prodotto dei due restanti (12 e 18) non è un quadrato perfetto.
Coppie di numeri di cui una componente è minore di 10 e il cui prodotto è un quadrato perfetto sono costituite da:

- coppie di quadrati perfetti diversi (1, 4, 9 e 16);
- coppie con componenti un primo inferiore a 10 (2, 3, 5 e 7) e un numero che sia prodotto di un quadrato perfetto e del primo all'altra componente: (8, 12, 18 e 20)—perciò 7 non può comparire in tali coppie, e la coppie possibili sono
$$(2, 8) \qquad (2, 18) \qquad (3, 12) \qquad (5, 20)$$
e quelle a componenti scambiate—;
- oppure le coppie di un cubo di un primo (8) e un numero che sia prodotto di un quadrato perfetto e della radice cubica dell'altra componente: (18).

In totale sono ventidue coppie.
Le coppie distinte di numeri compresi tra 1 e 20 sono 380.
La risposta è 0578.

Soluzione del problema 17. $2025 = 3^4 \cdot 5^2$.
I quattro numeri naturali sono perciò della forma
$$\begin{cases} a = 3^{a_1}5^{a_2} \\ b = 3^{b_1}5^{b_2} \\ c = 3^{c_1}5^{c_2} \\ d = 3^{d_1}5^{d_2} \end{cases}$$
dove
$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 4 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2 \\ a_1 b_1 c_1 d_1 = 0 \end{cases}$$
dato che la condizione $a_2 b_2 c_2 d_2 = 0$ è assicurata dalla condizione $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$.
Le quadruple di numeri che hanno somma 2 sono 10:
$$\begin{array}{ccccc} (0,0,0,2) & (0,0,1,1) & (0,0,2,0) & (0,1,0,1) & (0,1,1,0) \\ (0,2,0,0) & (1,0,0,1) & (1,0,1,0) & (1,1,0,0) & (2,0,0,0) \end{array}$$
Le quadruple di numeri di cui almeno uno è 0 e che hanno somma 4 sono 34:
$$\begin{array}{ccccccc} (0,0,0,4) & (0,0,1,3) & (0,0,2,2) & (0,0,3,1) & (0,0,4,0) & (0,1,0,3) & (0,1,1,2) \\ (0,1,2,1) & (0,1,3,0) & (0,2,0,2) & (0,2,1,1) & (0,2,2,0) & (0,3,0,1) & (0,3,1,0) \\ (0,4,0,0) & (1,0,0,3) & (1,0,1,2) & (1,0,2,1) & (1,0,3,0) & (1,1,0,2) & (1,1,2,0) \\ (1,2,0,1) & (1,2,1,0) & (1,3,0,0) & (2,0,0,2) & (2,0,1,1) & (2,0,2,0) & (2,1,0,1) \\ (2,1,1,0) & (2,2,0,0) & (3,0,0,1) & (3,0,1,0) & (3,1,0,0) & (4,0,0,0) & \end{array}$$
La risposta è 0340.

Soluzione del problema 18. La sezione è un trapezio:



Sia $l = 20\,\text{cm}$ il lato del cubo. La base maggiore misura $\sqrt{2}l$; la base minore misura $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. Il lato obliquo è lungo $\sqrt{1+\frac{1}{4}}l = \frac{\sqrt{5}}{2}l$. Dunque l'altezza del trapezio è lunga $\frac{3}{2\sqrt{2}}l$ e l'area è $\frac{9}{8}l^2$.
La risposta è 0450.

Soluzione del problema 19. La cifra di una coda può essere 1, 4, 5, 6 o 9. La cifra di una coda $n > 1$ non può essere 1, 5, 6 o 9, in quanto $11 = 55 = 99 = 3 \pmod 4$ e $66 = 2 \pmod 4$, ma $k^2 = 0, 1 \pmod 4$. D'altro canto, un quadrato perfetto non può terminare con 4444, perché $10^5 m + 4444 = 12 \pmod{16}$, ma $k^2 = 0, 1, 4, 9 \pmod{16}$. Infine si vede che $38^2 = 1444$.
La risposta è 0003.

Soluzione del problema 20. Grazie alla seconda condizione i numeri pari non sono imperfetti.
Inoltre un numero è divisibile per un quadrato perfetto maggiore di 1 se e solo se è divisibile per il quadrato di uno (qualunque) dei fattori primi del quadrato perfetto.
I numeri imperfetti sono perciò i numeri dispari che non sono multipli del quadrato di un primo. Quelli minori di 1000 sono i numeri dispari che non sono multipli di nessuno tra

$$\begin{array}{ccccc} 3^2 = 9 & 5^2 = 25 & 7^2 = 49 & 11^2 = 121 & 13^2 = 169 \\ 17^2 = 289 & 19^2 = 361 & 23^2 = 529 & 29^2 = 841 & 31^2 = 961. \end{array}$$

Per contare i numeri dispari inferiori a 1000 e multipli di uno dei quadrati sopra, è necessario fare attenzione ai multipli comuni a ciascuna coppia di quadrati di numeri primi; inferiori a 1000 hanno multipli comuni soltanto 9 e 25, e 9 e 49. Visto che $9 \cdot 49 = 441$, i multipli comuni dispari inferiori a 1000 sono uno. Visto che $9 \cdot 25 = 225$, i multipli comuni dispari inferiori a 1000 sono due.
I numeri dispari inferiori a 1000 e multipli di uno dei quadrati di primi sono perciò

$$(56 + 20 + 10 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1) - (2 + 1) = 96.$$

La risposta è 0404.

Soluzione del problema 21. Calcolo di p_1: i casi possibili sono $\binom{40}{10}$; i casi favorevoli 4^{10}. Perciò $p_1 = \frac{4^{10} \cdot 10!}{40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot 31}$.
Calcolo di p_2: i casi possibili sono $\binom{40}{12}$. I casi favorevoli si hanno se 9 numeri escono una sola volta (singoli) e uno esce tre volte (triplo) oppure 8 numeri una sola vola e 2 escono due volte (doppi). Nel primo caso, scelto il numero triplo in 10 modi, ci sono$\binom{4}{3} = 4$ scelte per i suoi semi e 4^9 scelte per le altre nove carte: $10 \cdot 4 \cdot 4^9$. Nel secondo caso, scelti i due numeri doppi in $\binom{10}{2}$ modi, i due semi di ciascun doppio in $\binom{4}{2}$ modi, ci sono 4^8 scelte per le altre otto carte: $\binom{10}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^8$. Dunque i casi favorevoli sono $4^9(40 + 405)$.
Perciò $p_2 = \frac{4^9 \cdot 445 \cdot 12!}{40 \cdot 39 \cdot \ldots \cdot 29}$.
Così $\frac{p_2}{p_1} = \frac{445 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 30 \cdot 29} = \frac{979}{58}$.
La risposta è 1037.