GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
VIII FINALE NAZIONALE
(10 maggio 2025)

SOLUZIONI

1. L'ULTIMO COMPITO [228]

Per il Teorema del Resto $p\left(\frac{1}{57}\right)=k\left(\frac{1}{57}\right)^3+167\left(\frac{1}{57}\right)^2+54\left(\frac{1}{57}\right)-1=0$ e quindi $\frac{k}{57^3}+\frac{167}{57^2}+\frac{54}{57}-1=0$ da cui si ottiene $k=57^3-167\cdot 57-54\cdot 57^2=228$.

2. COSA FACCIAMO OGGI? [2700]

Il triangolo A_1B_1C ha area $\frac{1}{4}A_{ABC}$, il triangolo successivo, nella suddivisione ha sempre area $\frac{1}{4}$ dell'area del triangolo precedente. La somma di tutte le aree vale $\sum A=2025\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)=2025\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=2025\cdot\frac{4}{3}=2700$

3. EHI, DOV'È PERRY? [1267]

Se O è il centro della sfera inscritta, ciascuna faccia avrebbe un raggio ad essa perpendicolare. Considerando i volumi dei tetraedri ottenuti unendo il centro O ai quattro vertici si osserva che:

$$r=\frac{3V}{S_{TOT}}=\frac{3\cdot\frac{1}{3}\frac{6\cdot 6}{2}\cdot 6}{3\cdot\frac{6\cdot 6}{2}+\frac{1}{2}6\sqrt{2}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}}=\frac{108}{54+18\sqrt{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}\cong 1,2679\text{ m}=1267,9\text{ mm}$$

4. STAVOLTA SIETE PROPRIO STATI BECCATI! [128]

(Michelangelo Sabatini)

Osservando (e numerando) le caselle durante le rotazioni della griglia di $90°, 180°$ o $270°$, otteniamo lo schema a fianco. Abbiamo quindi possibilità di scegliere la colorazione per ciascun numero usato.

In totale possiamo colorare $2^7=128$ griglie diverse.

1	2	3	4	1
4	5	6	5	2
3	6	7	6	3
2	5	6	5	4
1	4	3	2	1

5. NANI DA GIARDINO [5000]

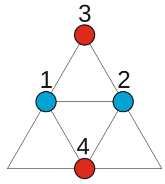
Se il numero è $\overline{abcde}$ deve succedere che: $\overline{de}\equiv 3\bmod 4$ cosa che accade per $\frac{100}{4}=25$ numeri e nessuno di questi ha lo 0 come ultima cifra, visto che l'ultima cifra dovrà essere dispari.

Affinché il numero invertito dia 3 se diviso per 5 a dovrà essere 3 o 8. Non abbiamo vincoli per b e c.

Abbiamo $2\cdot 25\cdot 10\cdot 10=5000$ numeri possibili.

6. LA MIGLIOR GIORNATA DEL DOLCE FAR NIENTE [7]

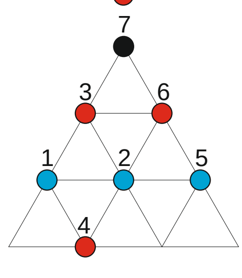
Scegliamo un triangolo equilatero e indichiamo in sequenza i suoi tre vertici. Due dovranno avere lo stesso colore. Supponiamo che 1 e 2 siano blu e 3 rosso. (in caso basta ruotare (o scambiare i colori) per ritrovarsi nella medesima posizione riportata in figura. Scegliamo il vertice che fa un triangolo con i due punti blu. Esso dovrà per forza rosso.



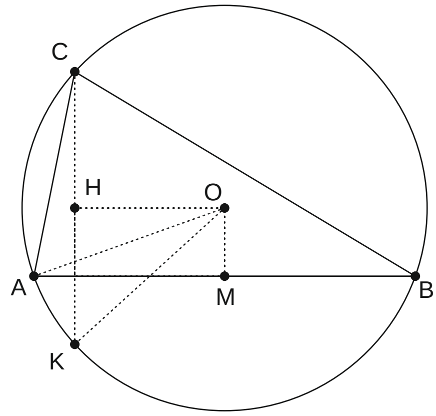
A questo punto scegliamo il punto a fianco del punto 2. Esso dovrà essere blu, altrimenti 3-4-5 formano un triangolo equilatero di punti rossi.

Scegliendo il vertice sopra 2 e 5 costringiamo l'avversario a colorarlo di rosso, altrimenti 2-5-6 formerebbero un triangolo equilatero blu.

Il settimo punto, quello sopra a 3 e 6 se rosso formerà un triangolo 3-6-7 rosso, altrimenti se blu sarà il triangolo 1-5-7 ad essere tutto blu.



7. MINIGOLF, MAXI-PASSIONE [56]



Prima soluzione.

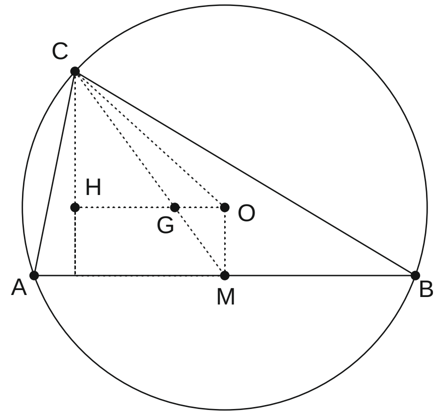
Riferendoci alla figura a fianco riportata, sappiamo che $HO = 22\ \text{dm}$, $OM = 10\ \text{dm}$. Sia $x = AM$.

Sappiamo che il simmetrico dell'ortocentro rispetto ad un qualsiasi lato giace sulla circonferenza circoscritta al triangolo. Sia K il simmetrico di H rispetto al lato AB. Abbiamo, per Pitagora, che $KO^2 = 22^2 + 20^2$.

Sempre per Pitagora $AO^2 = AM^2 + OM^2 = x^2 + 10^2$.

Siccome $AO = KO$ si ha $x^2 + 10^2 = 22^2 + 20^2$ e quindi $x = 28\ \text{dm}$.

$AB = 2x = 56\ \text{dm}$.



Seconda soluzione.

Tracciamo la mediana CM, essa incontra il segmento OH nel punto G, baricentro del triangolo, in quanto O, G e H stanno sulla retta di Eulero.

I triangoli CGH e OGM sono simili con rapporto di similitudine $k = 2$, quindi $CH = 20\ \text{dm}$.

$CO^2 = AO^2 = 22^2 + 20^2$ e $AM^2 = 22^2 + 20^2 - 10^2$ da cui $AM = 28\ \text{dm}$ e $AB = 56\ \text{dm}$

8. IL SUPERCOMPUTER [500]

Scegliendo una retta da tre dei quattro insiemi di rette parallele, avremo un triangolo rettangolo.

Ci sono in tutto $\binom{4}{3} \cdot 5^3 = 500$ triangoli rettangoli.

9. UN COMPLEANNO TUTTO DA VEDERE [15]

Detti x i mancini, dovrà accadere che: $\frac{(50-x)(49-x)}{2} - \frac{x(x-1)}{2} = 490$, equazione che porta a determinare $x = 15$.

10. GIUSTIZIA DIVINA [2026]

Detta r la ragione della progressione si ha $a_{1361} = a_1 r^{1360} \to (a_{1361})^3 = (a_1 r^{1360})^3 = a_1 r^{31} \to a_1^3 r^{4080} = a_1 r^{31}$.

Ma allora, semplificando, $a_1^2 r^{4049} = 1$ e poiché $a_1 > 1$, dovrà essere $0 < r < 1$ e la progressione è decrescente.

Osserviamo che $a_1^2 r^{4049} = a_1 r^{2024} \cdot a_1 r^{2025} = a_{2025} \cdot a_{2026} = 1$ e poiché la successione è decrescente dovrà essere $a_{2025} > 1 > a_{2026}$ dunque $n = 2026$.

11. UNA GIORNATA AL CENTRO BENESSERE [4321]

Siano x le palline verdi aggiunte. per la richiesta del problema deve essere:

$P(RossoRosso) + P(VerdeVerde) = P(RossoVerde)$

$\frac{45}{45+x} \cdot \frac{44}{44+x} + \frac{x}{45+x} \cdot \frac{x-1}{44+x} = 2 \cdot \frac{45}{45+x} \cdot \frac{x}{44+x}$ che porta all'equazione $x^2 - 91x + 1980 = 0$ le cui soluzioni sono $x = 36$ e $x = 55$. La soluzione richiesta è $36^2 + 55^2 = 4321$.

12. L'ERBA DEL PRATO VICINO [74]

Sia x la quantità di erba che mangia una mucca in un giorno e sia y la quantità di erba che cresce in tutto il prato in un giorno. Sia, inoltre, q la quantità di erba già presente sul prato prima che le mucche inizino a pascolare.

Le due affermazioni fatte portano a scrivere:

$$\begin{cases} 100 \cdot x \cdot 40 = q + 40y \\ 90x \cdot 65 = q + 65y \end{cases}.$$

Sottraendo dalla seconda la prima equazione si ottiene: $1850x = 25y$ che semplificata diventa $y = 74x$.

74 mucche consumano tutta l'erba cresciuta in un giorno, quindi potranno, ipoteticamente, nutrirsi per sempre.

13. ABBASSO I BULLI [200]

Sia g il grado del polinomio. Dall'equazione funzionale assegnata a sinistra dell'uguale il grado è $g+2$ mentre quello a destra è quello di $p(x^2)$ e cioè $2g$. Il polinomio dovrà essere di secondo grado.

Cerchiamo un polinomio $p(x)=ax^2+bx+c$ e sostituendo nell'equazione otteniamo:

$x^2\left(ax^2+bx+c\right)=ax^4+bx^2+c-\left(4ax^2+2bx+c\right)$ cioè $bx^3+(c-b+4a)x^2+2bx=0$ che dovendo essere verificata per ogni x ci porta a concludere che $b=0$ e $c=-4a$. $p(x)=ax^2-4a=a(x^2-4)$.

Sfruttando $p(10)=100$ otteniamo $p(10)=96a=100$ da cui $a=\frac{100}{96}=\frac{25}{24}$.

$p(x)=\frac{25}{24}(x^2-4)$ e di conseguenza $p(14)=\frac{25}{24}(196-4)=200$.

14. CHE VI PRENDE, RAGAZZI? [106]

I casi possibili sono $15\cdot 14=210$, cioè tutte le possibilità permesse per a e per b interi distinti con valore assoluto minore o uguale a 7.

Dobbiamo ora determinare i casi possibili.

Siccome $x_1x_2x_3=-10$ per le relazioni radici-coefficienti abbiamo le seguenti possibilità da considerare: $(-1,1,10)$ $(-1,-2,-5)$, $(1,2,-5)$, $(1,-2,5)$ e $(-1,2,5)$.

Ora siccome $a=-(x_1+x_2+x_3)$ la prima e la seconda soluzione è da scartare in quanto $a=-10$ o $a=8$.

$b=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$ ci fa scartare la terza soluzione in quanto viene $b=-13$.

Le altre due soluzioni vanne bene in quanto $(1,-2,5)$ ha $a=-4$ e $b=-7$ e $(-1,2,5)$ ha $a=-6$ e $b=3$.

La probabilità cercata è $P=\frac{2}{210}=\frac{1}{105}$.

La risposta richiesta è $1+105=106$

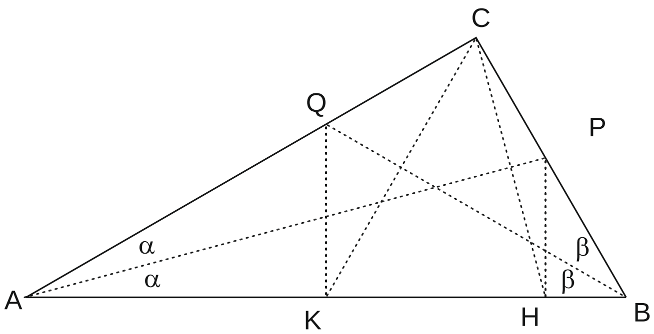
15. PICCOLO È BELLO [45]

Siano 2α e 2β gli angoli acuti del triangolo rettangolo.

Il quadrilatero $ACPH$ è ciclico e quindi $C\hat{H}P=P\hat{C}H=\alpha$. Analogamente per il quadrilatero $CQKB$ si ha

$Q\hat{K}C=Q\hat{C}H=\beta$

$K\hat{C}H=90°-(\alpha+\beta)=90°-45°=45°$.



16. FUGA DA TORRE PHINEAS [1704]

Dimostriamo una proprietà generale.

Dato un tetraedro $ABCD$, sia H un punto dello spigolo AB tale che $AH=\frac{1}{n}AB$, il tetraedro rimane diviso in due tetraedri $ADCH$ e $BCDH$ di volumi $\frac{1}{n}V$ e $\frac{n-1}{n}V$ rispettivamente. La dimostrazione è molto semplice una volta osservato che presa la base ADC e tracciati i segmenti perpendicolari BK e HK' con K e K' appartenenti al triangolo ADC si ha che BK è l'altezza del tetraedro di partenza e HK' è l'altezza del tetraedro $ADCH$ il cui volume è $V_{ADCH}=\frac{1}{3}A_{ADC}\cdot HK'=\frac{1}{3}A_{ADC}\cdot\frac{1}{n}BK=\frac{1}{n}V_{ABCD}$ vista che la proporzionalità tra le due altezze è pari alla proporzionalità dei due spigoli.

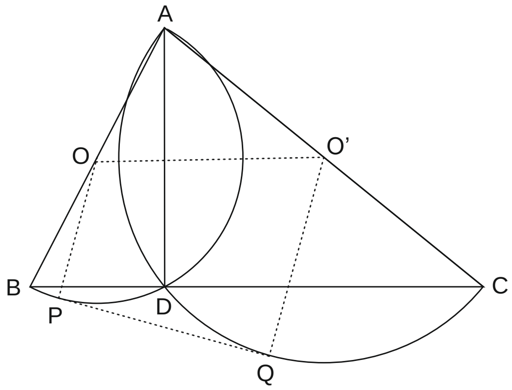
Applicando la proprietà appena dimostrata tre volte nel problema assegnato, otteniamo

$V_{VA'B'C'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}V_{VABC}=\frac{1}{24}V_{VABC}$.

$V_{VABC}=24\cdot V_{VA'B'C'}=24\cdot 71=1704\ \mathrm{m}^3$.

17. UN TELEFONO DA URLO [120]

La prima cosa da osservare è che D è proprio il punto di intersezione tra le due semicirconferenze e il lato BC in quanto $AD \perp BC$ in quanto ADB è un triangolo inscritto in una semicirconferenza.



$AC^2 - DC^2 = AD^2 = AB^2 - BD^2$ e quindi

$$DC^2 = AC^2 - AB^2 + BD^2 = \left(20,6\right)^2 - \left(10,6\right)^2 + 7^2 = 361 = 19^2 .$$

$$OO' = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(7+19) = 13 .$$

$$PQ^2 = OO'^2 - (O'Q - OP)^2 = 13^2 - (10,3-5,3)^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2 .$$

$$PQ = 12 \text{ cm} = 120 \text{ mm} .$$

18. FINALMENTE [1996]

$$P(V \mid primo) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$, e di conseguenza

$$P(P \mid \text{secondo}) = \frac{6}{11},\ P(P \mid \text{primo}) = P(V \mid \text{secondo}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} .$$

La probabilità cercata si calcola valutando quattro casi cioè se Phineas:

- perde-perde-perde: $\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}$;
- perde-vince-perde: $\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{6}{11}$;
- vince-perde-perde: $\frac{6}{11}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}$;
- vince-vince-perde: $\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{6}{11}$

La cui somma vale $P = \frac{125+180+180+180}{1331} = \frac{665}{1331}$.

La risposta richiesta è $665 + 1331 = 1996$.

19. ESVERNO O INSTATE? [241]

Siano A B C e D tali che $A+B+C+D \le 20$ e $A < B < C < D$.

Semplifichiamo il calcolo assegnando una pallina a B, due a C e tre a D in modo da trasformare il problema in $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D} \le 14$ e $\overline{A} \le \overline{B} \le \overline{C} \le \overline{D}$.

Procediamo per casi, valutando quante palline possiamo assegnare ad $\overline{A}$.

Il massimo che possiamo assegnare è 3 palline, visto che se fossero 4 avremmo bisogno di altre 12 per rispettare la condizione $\overline{A} \le \overline{B} \le \overline{C} \le \overline{D}$.

Supponiamo $\overline{A} = 3$. 9 palline servono per rispettare la condizione $\overline{A} \le \overline{B} \le \overline{C} \le \overline{D}$ e ne avanziamo ancora 2 da assegnare alle altre tre variabili. Abbiamo solamente le seguenti 4 possibilità: $(0,0,0,0)$ $(0,0,0,1)$ $(0,0,0,2)$ $(0,0,1,1)$.

Supponiamo $\overline{A} = 2$. 6 palline servono per rispettare la condizione $\overline{A} \le \overline{B} \le \overline{C} \le \overline{D}$ e ne avanziamo ancora 6 da assegnare alle altre tre variabili. Avremo le seguenti possibilità:

0,0,0,0	0,0,1,1	0,0,2,2	0,0,3,3	0,1,1,1	0,1,2,2	0,2,2,2
0,0,0,1	0,0,1,2	0,0,2,3		0,1,1,2	0,1,2,3	
0,0,0,2	0,0,1,3	0,0,2,4		0,1,1,3		
0,0,0,3	0,0,1,4			0,1,1,4		
0,0,0,4	0,0,1,5					
0,0,0,5						
0,0,0,6						
7	5	3	1	4	2	1

Osserviamo che nell'assegnazione delle palline rimanenti a $\overline{C}$ e $\overline{D}$ se restano un numero n pari di palline avremo $\left(\frac{n+2}{2}\right)^2$ casi possibili, se restano un numero n dispari, avremo $\frac{(n+1)(n+3)}{4}$ casi possibili. Questa osservazione ci aiuta a calcolare velocemente gli altri due casi.

<table>
<tr>
<td>
Supponiamo $\overline{A}=1$.
Ne avanziamo ancora 10 da assegnare alle altre tre variabili.

		avanzi	casi possibili
$\overline{B}=0$	$->$	10	36
$\overline{B}=1$	$->$	7	20
$\overline{B}=2$	$->$	4	9
$\overline{B}=3$	$->$	1	2

Per un totale di 67 casi.
</td>
<td>
Supponiamo $\overline{A}=0$.

		avanzi	casi possibili
$\overline{B}=0$	$->$	14	64
$\overline{B}=1$	$->$	11	42
$\overline{B}=2$	$->$	8	25
$\overline{B}=3$	$->$	5	12
$\overline{B}=4$	$->$	2	4

Per un totale di 147 casi.
</td>
</tr>
</table>

In totale abbiamo $4+23+67+147=241$ casi possibili.

20. TOP MODEL PER UN MINUTO [4862]

Sia $T_n=$ "numero dei modi per ottenere $n+1$ triangoli ottenuti tracciando n altezze". $T_0=1$ visto che se non traccio alcuna altezza ho solo il triangolo iniziale.

Osserviamo che $T_n=\sum_{i=0}^{n-1} T_i \cdot T_{n-i-1}$ che traduce l'idea che se ho tracciato i altezze a destra della prima altezza, me ne rimangono esattamente $n-i-1$ da tracciarne a sinistra.

La ricorsione ottenuta è quella dei numeri di Catalan e quindi $T_n=C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Nel nostro caso $T_9=\frac{1}{10}\binom{18}{9}=4862$.

21. POP STAR PER UN GIORNO [216]

Ricordiamo la definizione di ellisse: è il luogo dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, rimane costante, questo vuol dire che il perimetro del triangolo formato prendendo come vertici i due fuochi ed un punto qualunque dell'ellisse rimane sempre costante. Tutti i triangoli formati dai tre ragazzi avranno sempre perimetro pari a quello del triangolo iniziale e cioè $12+5+13=30$.

Siccome due dei ragazzi, alla fine, si trovano a distanza 10, il triangolo di perimetro 30 e area massima è il triangolo equilatero di lato 10. I punti in cui potrà trovarsi Candace saranno o $C_1(6,9+5\sqrt{3})$ o $C_2(6,9-5\sqrt{3})$

La risposta richiesta è $6\cdot 6\cdot(9+5\sqrt{3})(9-5\sqrt{3})=216$.

N.B. Con il tipo di trasformazione descritta dal problema è possibile ottenere tutti i triangoli di perimetro assegnato.