XXIV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 5-6 Maggio 2023

Ringraziamenti. La scrittura di tutti i testi riguardanti la fase finale delle Gare a Squadre ha richiesto l'aiuto di molteplici persone, nei ruoli di proposizione dei problemi, correzione dei problemi, ambientazione, beta-testing.

Ringraziamo dunque tutti i collaboratori: Alberto Cagnetta, Alessandro Fenu, Alessandro Iraci, Alessandro Tedeschi, Andrea Parma, Annalaura Pegoraro, Carlo Rotolo, Cecilia Moriggi, Chiara Ricciuti, Claudio Filippo Bianchi, Daniele Fedeli, Daria Pasqualetti, Davide Di Vora, Davide Pierrat, Edoardo Annunziati, Eduardo Venturini, Fabio Lilliu, Fabio Marconi, Federico Antonini, Federico Viola, Filippo Girardi, Flavio De Vincenti, Francesca Busato, Gianmaria Tomaselli, Giorgia Benassi, Giorgio Busoni, Giovanni Barbarino, Giovanni Caiolo, Giovanni Interdonato, Giovanni Marzenta, Giuseppe Di Fabio, Giuseppe Mascellani, Giuseppe Romanazzi, Iman Rosignoli, Lorenzo Benedini, Lorenzo Cortesi, Lorenzo Picinelli, Luca Ambrosino, Luca Macchiaroli, Lucio Tanzini, Mara Barucco, Massimiliano Foschi, Massimo Gasparini, Matteo Casarosa, Matteo Damiano, Matteo Nesi, Matteo Protopapa, Mattia Maculan, Michele Casella, Niocola Caravaggi, Riccardo Begliomini, Riccardo Moraschi, Roberto De Ferrari, Rubens Alessio Martino, Sebastiano Boscardin, Silvia Keira Kuzmin, Tiziana Eugenelo, Tommaso Dossi, Tommaso Faustini, Tommaso Lunghi, Valentino Badalucco, Wladimiro Gradi.

Un grazie particolare a coloro che hanno selezionato i testi: Federico Poloni, Leonardo Franchi, Marco Trevisiol, Matteo Migliorini, Silvia Pagani.

I responsabili scientifici
Maurizio Paolini e Simone Di Marino

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Semifinale 1 – Venerdì 5 Maggio 2023

HUAWEI

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Lo stemma di famiglia

Arcsenio Lupin/3 è il rampollo di un'illustre famiglia di ladri matematici. Da piccolo, Arcsenio amava disegnare e colorare lo stemma di famiglia, che è a forma di pentagono. In quanti modi è possibile colorare i lati dello stemma, usando i colori giallo, blu e rosso, in modo che lati consecutivi abbiano colori diversi?

2. Area massima

Il primo ad unirsi alle avventure di Lupin/3 è stato Jig$\in\mathbb{N}$, abile pistolero e risolutore di quesiti. Ad esempio, intanto che ricaricava ha determinato quale fosse la massima area che può avere un triangolo con il lato più corto che misura 40 e con il lato più lungo che misura 101. Qual è?

3. Per scappare da Zenonigata

L'ispettore Zenonigata ha votato la propria carriera alla cattura di Lupin/3. Forse stavolta ce l'ha fatta: la zattera di Lupin/3 (un quadrato di lato ℓ) ha un lato incollato ad un lato della zattera di Zenonigata (un quadrato più grande, di lato 1100). L'unica possibilità per Lupin/3 di farla franca sarebbe quella di calcolare la lunghezza di ℓ, sapendo che la circonferenza circoscritta alla zattera di Zenonigata passa anche per i due vertici della zattera di Lupin/3 che non giacciono sull'altra zattera. Sfortunatamente per l'ispettore, Lupin/3 fugge. Quanto vale ℓ?

4. Cassette di sicurezza

Le cassette di sicurezza della banca che Lupin/3 sta rapinando sono disposte come una scacchiera 9×9 (messa in verticale) dalla quale sono state rimosse tutte le caselle strettamente sopra la diagonale che va da in alto a sinistra a in basso a destra. Lupin sa che ogni cassetta contiene un numero intero di milioni di dollari compreso tra 1 e 9, estremi inclusi; inoltre, ogni numero compare un numero diverso di volte ed in modo che ogni cassetta contenga un numero strettamente maggiore rispetto alla cassetta sottostante (se c'è una cassetta) e maggiore o uguale rispetto alla cassetta alla sua sinistra (se c'è). In quanti modi possono essere disposti i soldi?

5. Non scrivibilità

Goemetrikon è un abile samaterai che alterna la fidata katana alla risoluzione di quesiti matematici. L'ultimo che ha risolto è il seguente: siano a e b interi positivi tali che 2069 sia il più grande numero che non può essere scritto come somma di un multiplo (non negativo) di a e di un multiplo (non negativo) di b. Quanto vale, come minimo, ab? Dopo averlo visto all'opera, Lupin/3 lo vuole nella propria banda.

6. Sporcarsi le mani

Goemetrikon: «Mi unirò a voi se dimostrerete di non aver paura di sporcarvi le mani... nel fare i conti. Mi sapreste dire quanto vale $2023^3 - 3\cdot 2022^3 + 3\cdot 2021^3 - 2020^3$?».
Lupin/3: «Dammi un attimo... ». Qual è la risposta al quesito di Goemetrikon?

7. Lupin/3 si innamora

Lupin/3 è innamorato della bella FujItō, una ladra che lo ha ammaliato rispondendo quasi all'istante al seguente quesito: quanto vale la somma $\mathrm{mcm}(1,8)+\mathrm{mcm}(2,8)+\ldots+\mathrm{mcm}(136,8)$?

8. M'ama non m'ama

C'è chi sfoglia le margherite per sapere se il proprio amore è corrisposto, Lupin/3 preferisce invece affidarsi a questo gioco: estrae tre palline da un sacchetto contenente 9 palline numerate da 1 a 9. Ogni volta che estrae una pallina segna il numero e poi la reinserisce nel sacchetto. Se il massimo comun divisore (MCD) di questi 3 numeri è 1 allora la bella FujItō contraccambia il suo amore, altrimenti non è ricambiato. Qual è la probabilità che Lupin/3 sia corrisposto? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

9. Sei porte in sequenza

Lupin/3 e la sua banda vogliono rubare il prototipo di un nuovo computer quantistico. Devono superare in sequenza sei porte. Ogni porta ha come codice di accesso un numero intero compreso tra 0 e 18 estremi inclusi. Hanno scoperto che la somma dei codici di due porte consecutive è un numero che diviso per 19 dà resto 3. Questa proprietà vale per la prima e la seconda porta, per la seconda e la terza, e così via ma anche per la sesta e la prima porta. Quante sono le sequenze di sei codici che soddisfano queste condizioni?

10. Lavoro di squadra

Lupin/3 è riuscito a mettere le mani sullo scudo di Volpe Nera dove è incastonato il prezioso diamante Regina d'Africa. Lo scudo è un quadrato $ABCD$. Jig∈ℕ scalfisce i lati del quadrato, un proiettile per ogni lato: A' sul lato AB tale che $2AA' = A'B$ e, ciclicamente anche B' sul lato BC tale che $2BB' = B'C$, analogamente C' e D'. Goemetrikon esegue quattro tagli netti lungo DA', AB', BC' e CD' staccando così il diamante centrale dal resto dello scudo. Quanto vale il rapporto tra l'area del diamante e quella dello scudo iniziale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. La disciplina del samaterai [⋆]

Goemetrikon è diventato un samaterai grazie a disciplina ferrea e quesiti di geometria. Anni fa risolse questo: sia Γ una circonferenza di centro O, e sia r una retta tangente ad essa nel punto T. Siano A un punto appartenente a r distinto da T, e B e C le intersezioni della retta OA con Γ tali che $AB<AC$. Siano M un punto sul segmento OC e R l'intersezione della retta TM con Γ distinta da T. Infine, siano S un punto sull'arco di estremi TC non contenente B tale che $\widehat{MAT} = \widehat{RTS}$, F un punto sul segmento BS tale che $\widehat{ATS} + \widehat{BFT} = 180°$, e Q l'intersezione dei segmenti BC e RS. Sapendo che $\frac{QR}{RM} = \frac{8}{13}$, $BS = 33$ e $TF = 18$, determinare il rapporto delle aree dei triangoli BMF e BSQ. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

12. Malanni matematici [⋆]

Jig∈ℕ: «Hai letto che nelle città di MathVillain ed EstPonente quest'anno la sin(usite) è stata più forte del solito?».
Goemetrikon: «Sì. La percentuale di ammalati su tutta la popolazione a MathVillain è stata l'8%, mentre ad EstPonente è stata del 10%.».
Jig∈ℕ: «Inoltre, tra gli under 50 la percentuale di ammalati a MathVillain è stata doppia che ad EstPonente, ed anche nella fascia over 50 è stato riscontrato lo stesso rapporto.».
Goemetrikon: «Com'è possibile? Non c'è una contraddizione?».
Jig∈ℕ: «No. Sapendo che entrambe le città sono giovani, cioè gli under 50 sono almeno tanti quanti gli over 50, quanto è al minimo il rapporto tra gli under 50 mathvillani e il totale della popolazione di MathVillain?».
Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

13. Colpo al museo

Per progettare il colpo perfetto occorre conoscere perfettamente il luogo. Lupin/3, Jig∈ℕ e Goemetrikon studiano la mappa della stanza del museo da cui faranno sparire una famosa statua. La stanza è un triangolo ABC isoscele di base AB. Le tre porte della stanza si trovano in M, il punto medio di BC, in F, il piede dell'altezza relativa a B e in E, punto su AB tale che $EB \cong BM$. Sanno inoltre che per B, E, F, M passa una circonferenza. Per riuscire a eludere la videosorveglianza, è importante conoscere l'ampiezza degli angoli di ABC. Quanto vale $\widehat{ACB}$?

14. La Massima Comun Combinazione [⋆]

Goemetrikon: «Ecco la cassaforte! Il codice che la apre è il massimo comun divisore di tutti i numeri della forma $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 999^n$ dove n è un intero positivo...».
Jig∈ℕ: «Accidenti, non abbiamo tempo di calcolare infiniti numeri!». Lupin/3 sogghigna. Qual è il codice?

15. Salto dell'ispettore

L'ispettore Zenonigata è convinto di riuscire a catturare tutti e tre i ladri. Egli si trova nel baricentro del triangolo GJL formato dai tre ladri. Goemetrikon e Jig∈ℕ distano 79 metri l'uno dall'altro, mentre Goemetrikon e Lupin/3 distano 119 metri. Goemetrikon salta come solo i samaterai sanno fare ed atterra nel simmetrico, rispetto a Zenonigata, del suo punto di partenza. Realizza che si trova (ancora) sulla circonferenza circoscritta a GJL; calcola la distanza tra Lupin e Jig∈ℕ e porta in salvo i suoi amici. Quanti metri misura la distanza tra Lupin e Jig∈ℕ?

16. Una cena per gioco

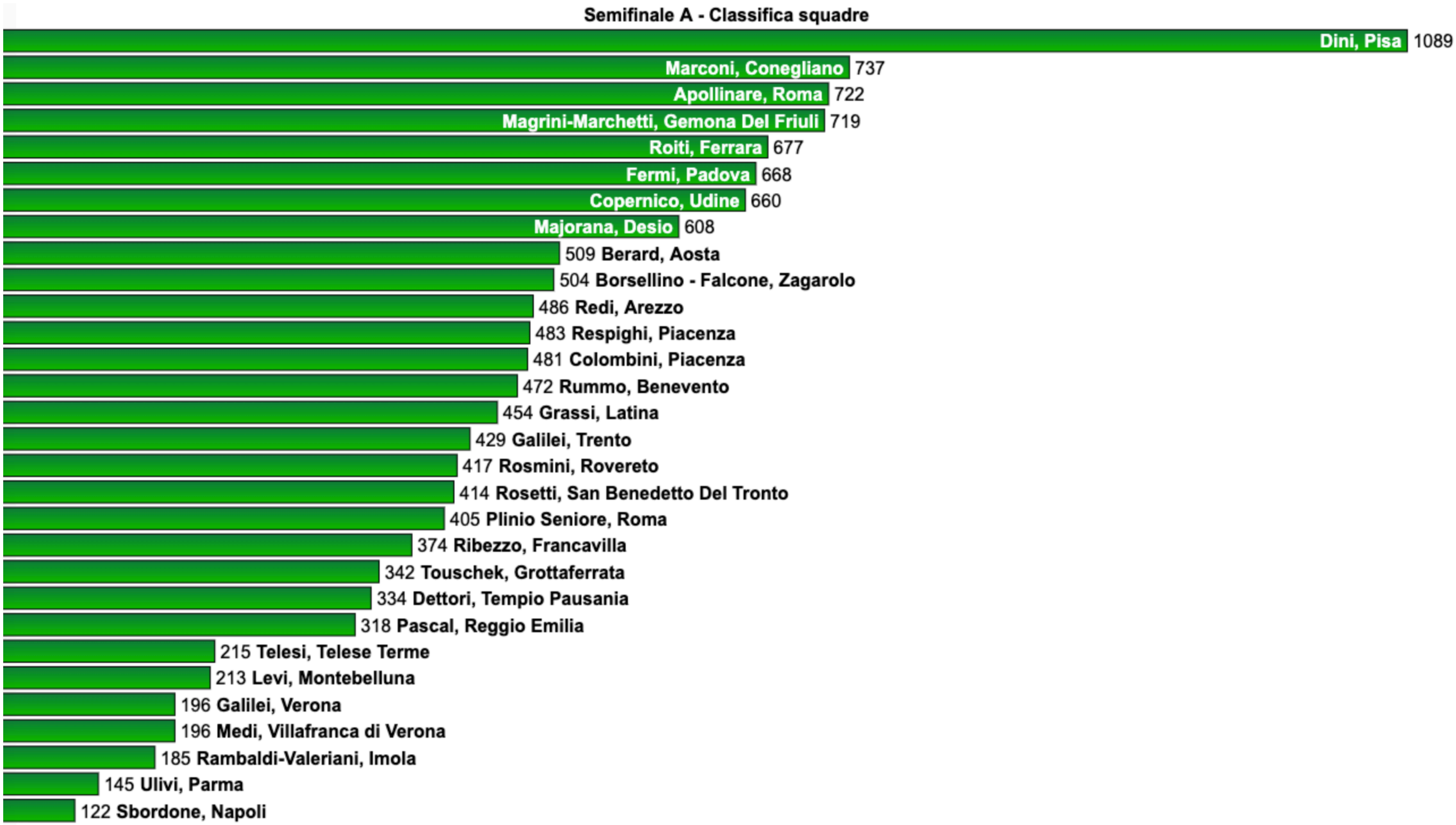
Sia Lupin/3 che FujItō amano scommettere. Ora giocano l'uno contro l'altra: se vince Lupin/3, usciranno a cena; se vince FujItō, lui dovrà regalarle l'enorme diamante che ha appena rubato. Hanno di fronte a loro 2023 fiammiferi. Inizialmente FujItō sceglie un intero positivo n. Lupin/3 nei suoi turni toglie un numero di fiammiferi fra 1 e n estremi compresi; invece, FujItō ad ogni turno toglie un numero di fiammiferi fra $n+1$ e $2n$ estremi compresi. Inizia a muovere Lupin/3. Chi all'inizio del proprio turno non può fare nessuna mossa ha perso. *Dare come risposta la somma dei valori di n che FujItō può scegliere per essere sicura di vincere.*

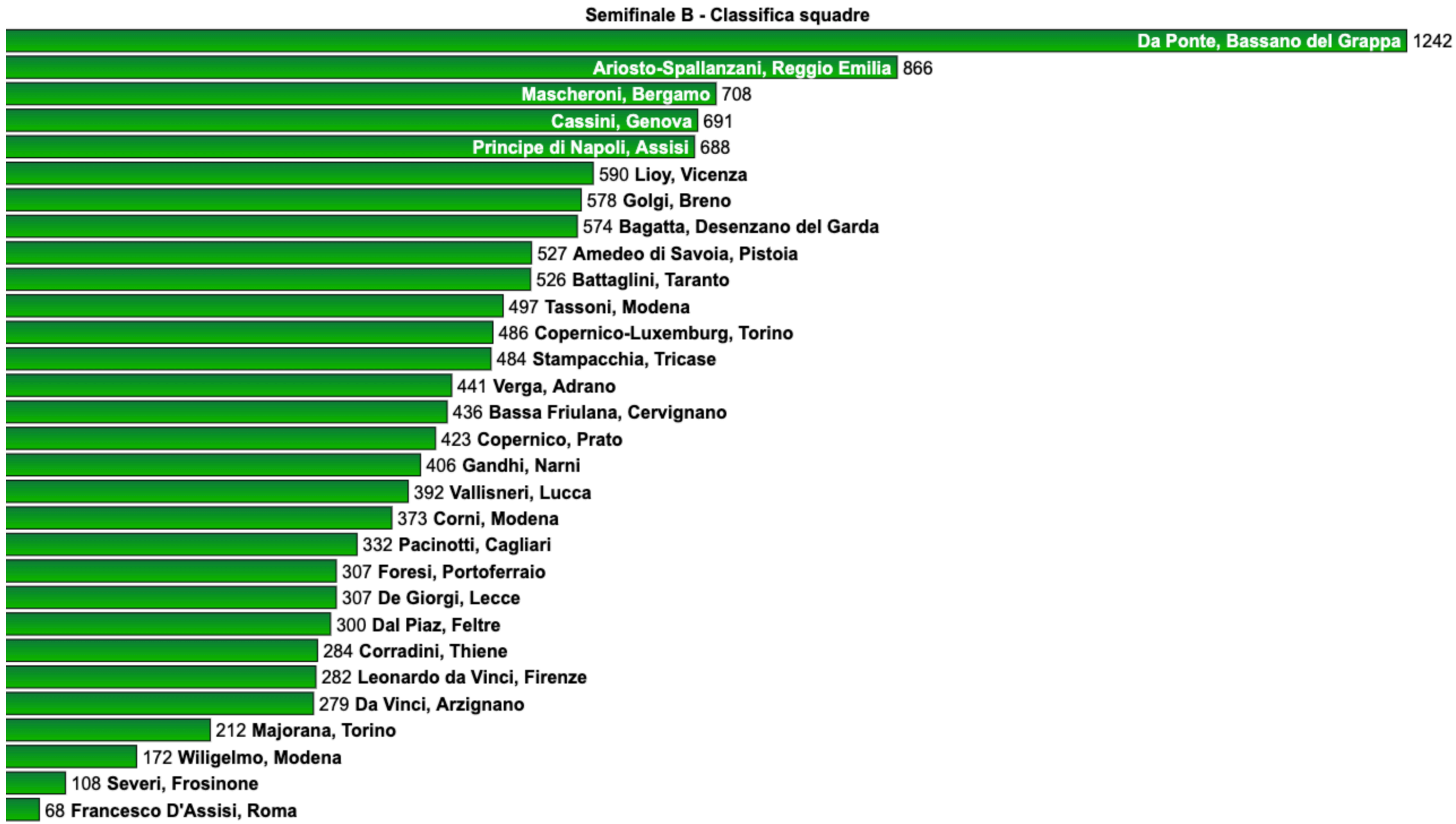
XXIV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 5 Maggio 2023

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Lo stemma di famiglia	0030
2	Area massima	1980
3	Per scappare da Zenonigata	0220
4	Cassette di sicurezza	2880
5	Non scrivibilità	2162
6	Sporcarsi le mani	0006
7	Lupin/3 si innamora	9776
8	M'ama non m'ama	1366
9	Sei porte in sequenza	0019
10	Lavoro di squadra	0007
11	La disciplina del samaterai [$\star$]	3457
12	Malanni matematici [$\star$]	0009
13	Colpo al museo	0036
14	La Massima Comun Combinazione [$\star$]	0900
15	Salto dell'ispettore	0101
16	Una cena per gioco	1225


Semifinale A - Classifica squadre
Dini, Pisa 1089
Marconi, Conegliano 737
Apollinare, Roma 722
Magrini-Marchetti, Gemona Del Friuli 719
Roiti, Ferrara 677
Fermi, Padova 668
Copernico, Udine 660
Majorana, Desio 608
509 Berard, Aosta
504 Borsellino - Falcone, Zagarolo
486 Redi, Arezzo
483 Respighi, Piacenza
481 Colombini, Piacenza
472 Rummo, Benevento
454 Grassi, Latina
429 Galilei, Trento
417 Rosmini, Rovereto
414 Rosetti, San Benedetto Del Tronto
405 Plinio Seniore, Roma
374 Ribezzo, Francavilla
342 Touschek, Grottaferrata
334 Dettori, Tempio Pausania
318 Pascal, Reggio Emilia
215 Telesi, Telese Terme
213 Levi, Montebelluna
196 Galilei, Verona
196 Medi, Villafranca di Verona
185 Rambaldi-Valeriani, Imola
145 Ulivi, Parma
122 Sbordone, Napoli


Semifinale B - Classifica squadre
Da Ponte, Bassano del Grappa 1242
Ariosto-Spallanzani, Reggio Emilia 866
Mascheroni, Bergamo 708
Cassini, Genova 691
Principe di Napoli, Assisi 688
590 Lioy, Vicenza
578 Golgi, Breno
574 Bagatta, Desenzano del Garda
527 Amedeo di Savoia, Pistoia
526 Battaglini, Taranto
497 Tassoni, Modena
486 Copernico-Luxemburg, Torino
484 Stampacchia, Tricase
441 Verga, Adrano
436 Bassa Friulana, Cervignano
423 Copernico, Prato
406 Gandhi, Narni
392 Vallisneri, Lucca
373 Corni, Modena
332 Pacinotti, Cagliari
307 Foresi, Portoferraio
307 De Giorgi, Lecce
300 Dal Piaz, Feltre
284 Corradini, Thiene
282 Leonardo da Vinci, Firenze
279 Da Vinci, Arzignano
212 Majorana, Torino
172 Wiligelmo, Modena
108 Severi, Frosinone
68 Francesco D'Assisi, Roma

Olimpiadi della matematica Semifinale A (05/05/2023)

			D.1 29	D.2 45	D.3 41	D.4 87	D.5 87	D.6 33	D.7 51	D.8 62	D.9 36	D.10 37	D.11 97	D.12 101	D.13 41	D.14 86	D.15 95	D.16 93
1	Dini [Pisa]	1089	34	45	31	107	97	13	56	62	36	30	107	-10	102 J	106		113
2	Marconi [Conegliano]	737	32	45	41	102	92	33	-20	67	36	37			122 J			-10
3	Apollinare [Roma]	722	29	45	41			33	142 J	62	39	37			41			93
4	Magrini [Gemona del Friuli]	719	19	45	41	97		38	51	164 J	36	37			41			-10
5	Roiti [Ferrara]	677	29	48	61			33	-10	52	41	57			-10			216 J
6	Fermi [Padova]	668	29	45	41			33	132 J	62	36	37			-10			103
7	Copernico [Udine]	660	29	65	51		214 J	23	31	-30	36	37			44			
8	Majorana [Desio]	608	19		41	-10		33		65	26	52		222 J				
9	Berard [Aosta]	509	29	50	56			43	-20		36	74 J			-10	91		
10	Borsellino-Falcone [Zagarolo]	504	29	45	41		-10	33	-30		51	84 J				101		
11	Redi [Arezzo]	486	44		31		102	33	51	-40	26	27			82 J	-10	-10	-10
12	Respighi [Piacenza]	483	49	45	34			33	-20	67	46	27			112 J	-50		-20
13	Colombini [Piacenza]	481	29	-20	21			23	41	62	36	37			92 J			
14	Rummo [Benevento]	472		35	41			33	61	-10	36	27			31	58 J		
15	Grassi [Latina]	454	19	45	82 J	92		13	-10	-10	56	27			-20			
16	Galilei [Trento]	429	39	25	46			23	51	-30	36	17		-10	-20	152 J		-60
17	Rosmini [Rovereto]	417	9	35	41			53	54	32	26	37		-20 J		-10		
18	Rosetti [San Benedetto del Tronto]	414	29	55	31			38	-10	-20	36	17		J	-10	-10		98
19	Plinio Seniore [Roma]	405	19	-10		-10		33	41	42	72 J	37			41		-20	
20	Ribezzo [Francavilla]	374	19	-10	41	-10		33	41	-10	36	94 J			-10	-10		
21	Touschek [Grottaferrata]	342	29	45	42 J			23		-10	26	27						
22	Dettori [Tempio Pausania]	334	19	-10	31	-10		33		-20	36	54 J			41			
23	Pascal [Reggio Emilia]	318	-30	50	-10	-10		23	82 J		36	27				-10		
24	Telesi [Telese Terme]	215	19	-10	-10		-10	66 J										
25	Levi [Montebelluna]	213	19	-20	-30	-10	-20	36	-10	-10	32 J	-10				-10		86
26	Galilei [Verona]	196	29		41					-20	36	-10		-20 J		-10		-10
27	Medi [Villafranca di Verona]	196	-20	-10				33		-20	36	37			-20			J
28	Rambaldi-Valeriani [Imola]	185	-10	35			-10	33	-20 J	-10	-10	37			-10			-10
29	Ulivi [Parma]	145	19		-10			-30			26	-20		J				
30	Sbordone [Napoli]	122	-60	-10				66 J	-10	-10	26	-10		-30				

Olimpiadi della matematica Semifinale B (05/05/2023)

			D.1	D.2	D.3	D.4	D.5	D.6	D.7	D.8	D.9	D.10	D.11	D.12	D.13	D.14	D.15	D.16
			25	30	40	97	53	33	58	57	29	35	95	97	72	86	85	60
1	Da Ponte [Bassano del Grappa]	1242	25	30	40	117	63	53	61	57	49	55	-10	214 J	72	91	105	60
2	Ariosto-Spallanzani [Reggio Emilia]	866	-50	20	40		73	33	-20	-10	29	35	230 J		77	96	100	53
3	Mascheroni [Bergamo]	708	35	35	40		46	33	73		19	25			62		180 J	
4	Cassini [Genova]	691	25	30	30	112	58	38	96 J	47	29	-20				96		-10
5	Principe di Napoli [Assisi]	688	25	30	40		-20	33	-20	124 J	29	50			72		95	70
6	Lioy [Vicenza]	590	25	50	40		58	33		52	64 J	40			-10		78	
7	Golgi [Breno]	578	-10	30			53	23	156 J	37	29	35						65
8	Bagatta [Desenzano del Garda]	574	-10	45	50			33	48	-10	29	25		224 J	-10			-10
9	Amedeo di Savoia [Pistoia]	527	25	30	55			33	68	-10	29	35			-10	112 J		
10	Battaglini [Taranto]	526	25	10	30		53	36	38	67	29	-10				98 J		-10
11	Tassoni [Modena]	497	25	30	80 J			33	58	57	29	35						-10
12	Copernico-Luxemburg [Torino]	486	45	-20	40		43	-10	-10	-20	88 J	35			75			60
13	Stampacchia [Tricase]	484	25	33	40			43	63	47	58 J	35						-20
14	Verga [Adrano]	441	15		30			33	-30	-10	19	76 J			92	66	-10	
15	Bassa Friulana [Cervignano]	436	25	20	40			33	-10	-20	29	15			144 J			
16	Copernico [Prato]	423	25	30	60		53	33	58	-30	29	35		J		-30		
17	Gandhi [Narni]	406	15	30	45			33		-10	58 J	35		-20				60
18	Vallisneri [Lucca]	392	5	30	-10			23		40	34	-30				-10		150 J
19	Corni [Modena]	373	30		40		-10	33	96 J	-20	29	35			-10			-10
20	Pacinotti [Cagliari]	332	15	30			53	23		-40	19	15		J	77	-10	-10	
21	Foresi [Portoferraio]	307	25	-10				-20	-10	-10	-10					182 J		
22	De Giorgi [Lecce]	307	15	20	43	-60 J	-10	33	-10	-20	29	35			72			
23	Dal Piaz [Feltre]	300	25		-20			48		-10	-10	35			72		J	
24	Corradini [Thiene]	284	25	-20				23	48		58 J							-10
25	Leonardo da Vinci [Firenze]	282	15	30				33		-10	39	35		-20 J				
26	Da Vinci [Arzignano]	279	-20			-10		33	-20	77	29	50 J		-10				-10
27	Majorana [Torino]	212	40	-20	40			13		-20	19				-20 J			
28	Wiligelmo [Modena]	172	-20		30		-20 J	33		-10	9					-10		
29	Severi [Frosinone]	108	-10	-20	-10		-20	-40			58 J				-10			
30	Francesco d'Assisi [Roma]	68	28					-20	-10	-80 J					-10			

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 5 Maggio 2023

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Colorare il bordo

Arcsenio Lupin/3 è il rampollo di un'illustre famiglia di ladri matematici. Da piccolo, Arcsenio amava disegnare e colorare lo stemma di famiglia, che è a forma di pentagono. In quanti modi è possibile colorare i lati dello stemma, usando i colori giallo, blu e rosso, in modo che lati consecutivi abbiano colori diversi?

2. Zattere quadrate

L'ispettore Zenonigata ha votato la propria carriera alla cattura di Lupin/3. Forse stavolta ce l'ha fatta: la zattera di Lupin/3 (un quadrato di lato ℓ) ha un lato incollato ad un lato della zattera di Zenonigata (un quadrato più grande, di lato 1200). L'unica possibilità per Lupin/3 di farla franca sarebbe quella di calcolare la lunghezza di ℓ, sapendo che la circonferenza circoscritta alla zattera di Zenonigata passa anche per i due vertici della zattera di Lupin/3 che non giacciono sull'altra zattera. Sfortunatamente per l'ispettore, Lupin/3 fugge. Quanto vale ℓ?

3. Triangoli areati

Il primo ad unirsi alle avventure di Lupin/3 è stato Jig$\in\mathbb{N}$, abile pistolero e risolutore di quesiti. Ad esempio, intanto che ricaricava ha determinato quale fosse la massima area che può avere un triangolo con il lato più corto che misura 38 e con il lato più lungo che misura 181. Qual è?

4. Un samaterai aritmetico

Goemetrikon è un abile samaterai che alterna la fidata katana alla risoluzione di quesiti matematici. L'ultimo che ha risolto è il seguente: siano a e b interi positivi tali che 2023 sia il più grande numero che non può essere scritto come somma di un multiplo (non negativo) di a e di un multiplo (non negativo) di b. Quanto vale, come minimo, ab? Dopo averlo visto all'opera, Lupin/3 lo vuole nella propria banda.

5. Nostalgia degli ultimi anni

Goemetrikon: «Mi unirò a voi se dimostrerete di non aver paura di sporcarvi le mani... nel fare i conti. Mi sapreste dire quanto vale $2023^3 - 3 \cdot 2022^3 + 3 \cdot 2021^3 - 2020^3$?».
Lupin/3: «Dammi un attimo...». Qual è la risposta al quesito di Goemetrikon?

6. Furto quantistico

Lupin/3 e la sua banda vogliono rubare il prototipo di un nuovo computer quantistico. Devono superare in sequenza sei porte. Ogni porta ha come codice di accesso un numero intero compreso tra 0 e 22 estremi inclusi. Hanno scoperto che la somma dei codici di due porte consecutive è un numero che diviso per 23 dà resto 3. Questa proprietà vale per la prima e la seconda porta, per la seconda e la terza, e così via ma anche per la sesta e la prima porta. Quante sono le sequenze di sei codici che soddisfano queste condizioni?

7. Un taglio di squadra

Lupin/3 è riuscito a mettere le mani sullo scudo di Volpe Nera dove è incastonato il prezioso diamante Regina d'Africa. Lo scudo è un quadrato $ABCD$. Jig$\in\mathbb{N}$ scalfisce i lati del quadrato, un proiettile per ogni lato: A' sul lato AB tale che $3AA' = A'B$ e, ciclicamente anche B' sul lato BC tale che $3BB' = B'C$, analogamente C' e D'. Goemetrikon esegue quattro tagli netti lungo DA', AB', BC' e CD' staccando così il diamante centrale dal resto dello scudo. Quanto vale il rapporto tra l'area del diamante e quella dello scudo iniziale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

8. Un calcolo ammaliante

Lupin/3 è innamorato della bella FujItō, una ladra che lo ha ammaliato rispondendo quasi all'istante al seguente quesito: quanto vale la somma $\text{mcm}(1,8)+\text{mcm}(2,8)+\ldots+\text{mcm}(120,8)$?

9. M'ama non m'ama

C'è chi sfoglia le margherite per sapere se il proprio amore è corrisposto, Lupin/3 preferisce invece affidarsi a questo gioco: estrae tre palline da un sacchetto contenente 9 palline numerate da 1 a 9. Ogni volta che estrae una pallina segna il numero e poi la reinserisce nel sacchetto. Se il massimo comun divisore (MCD) di questi 3 numeri è 1 allora la bella FujItō contraccambia il suo amore, altrimenti non è ricambiato. Qual è la probabilità che Lupin/3 sia corrisposto? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

10. Il talento di Goemetrikon [$\star$]

Goemetrikon è diventato un samaterai grazie a disciplina ferrea e quesiti di geometria. Anni fa risolse questo: sia Γ una circonferenza di centro O, e sia r una retta tangente ad essa nel punto T. Siano A un punto appartenente a r distinto da T, e B e C le intersezioni della retta OA con Γ tali che $AB<AC$. Siano M un punto sul segmento OC e R l'intersezione della retta TM con Γ distinta da T. Infine, siano S un punto sull'arco di estremi TC non contenente B tale che $\widehat{MAT}=\widehat{RTS}$, F un punto sul segmento BS tale che $\widehat{ATS}+\widehat{BFT}=180°$, e Q l'intersezione dei segmenti BC e RS. Sapendo che $\frac{QR}{RM}=\frac{8}{13}$, $BS=33$ e $TF=18$, determinare il rapporto delle aree dei triangoli BMF e BSQ. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. I milioni ben disposti

Le cassette di sicurezza della banca che Lupin/3 sta rapinando sono disposte come una scacchiera 8×8 (messa in verticale) dalla quale sono state rimosse tutte le caselle strettamente sopra la diagonale che va da in alto a sinistra a in basso a destra. Lupin sa che ogni cassetta contiene un numero intero di milioni di dollari compreso tra 1 e 8, estremi inclusi; inoltre, ogni numero compare un numero diverso di volte ed in modo che ogni cassetta contenga un numero strettamente maggiore rispetto alla cassetta sottostante (se c'è una cassetta) e maggiore o uguale rispetto alla cassetta alla sua sinistra (se c'è). In quanti modi possono essere disposti i soldi?

12. Oltre il baricentro

L'ispettore Zenonigata è convinto di riuscire a catturare tutti e tre i ladri. Egli si trova nel baricentro del triangolo GJL formato dai tre ladri. Goemetrikon e Jig$\in\mathbb{N}$ distano 63 metri l'uno dall'altro, mentre Goemetrikon e Lupin/3 distano 153 metri. Goemetrikon salta come solo i samaterai sanno fare ed atterra nel simmetrico, rispetto a Zenonigata, del suo punto di partenza. Realizza che si trova (ancora) sulla circonferenza circoscritta a GJL; calcola la distanza tra Lupin e Jig$\in\mathbb{N}$ e porta in salvo i suoi amici. Quanti metri misura la distanza tra Lupin e Jig$\in\mathbb{N}$?

13. Gioco asimmetrico

Sia Lupin/3 che FujItō amano scommettere. Ora giocano l'uno contro l'altra: se vince Lupin/3, usciranno a cena; se vince FujItō, lui dovrà regalarle l'enorme diamante che ha appena rubato. Hanno di fronte a loro 2022 fiammiferi. Inizialmente FujItō sceglie un intero positivo n. Lupin/3 nei suoi turni toglie un numero di fiammiferi fra 1 e n estremi compresi; invece, FujItō ad ogni turno toglie un numero di fiammiferi fra $n+1$ e $2n$ estremi compresi. Inizia a muovere Lupin/3. Chi all'inizio del proprio turno non può fare nessuna mossa ha perso. *Dare come risposta la somma dei valori di n che FujItō può scegliere per essere sicura di vincere.*

14. Paradosso statistico [$\star$]

Jig$\in\mathbb{N}$: «Hai letto che nelle città di MathVillain ed EstPonente quest'anno la sin(usite) è stata più forte del solito?».
Goemetrikon: «Sì. La percentuale di ammalati su tutta la popolazione a MathVillain è stata il 7,5%, mentre ad EstPonente è stata del 10%.».
Jig$\in\mathbb{N}$: «Inoltre, tra gli under 50 la percentuale di ammalati a MathVillain è stata doppia che ad EstPonente, ed anche nella fascia over 50 è stato riscontrato lo stesso rapporto.».
Goemetrikon: «Com'è possibile? Non c'è una contraddizione?».
Jig$\in\mathbb{N}$: «No. Sapendo che entrambe le città sono giovani, cioè gli under 50 sono almeno tanti quanti gli over 50, quanto è al minimo il rapporto tra gli under 50 mathvillani e il totale della popolazione di MathVillain?».
Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

15. La stanza della statua

Per progettare il colpo perfetto occorre conoscere perfettamente il luogo. Lupin/3, Jig$\in\mathbb{N}$ e Goemetrikon studiano la mappa della stanza del museo da cui faranno sparire una famosa statua. La stanza è un triangolo ABC isoscele di base AB. Le tre porte della stanza si trovano in M, il punto medio di BC, in F, il piede dell'altezza relativa a B e in E, punto su AB tale che $EB\cong BM$. Sanno inoltre che per B,E,F,M passa una circonferenza. Per riuscire a eludere la videosorveglianza, è importante conoscere l'ampiezza degli angoli di ABC. Quanto vale $\widehat{CAB}$?

16. La combinazione divisiva [$\star$]

Goemetrikon: «Ecco la cassaforte! Il codice che la apre è il massimo comun divisore di tutti i numeri della forma $1^n+2^n+3^n+\cdots+9999^n$ dove n è un intero positivo...».
Jig$\in\mathbb{N}$: «Accidenti, non abbiamo tempo di calcolare infiniti numeri!». Lupin/3 sogghigna. Qual è il codice?

Unione Matematica Italiana

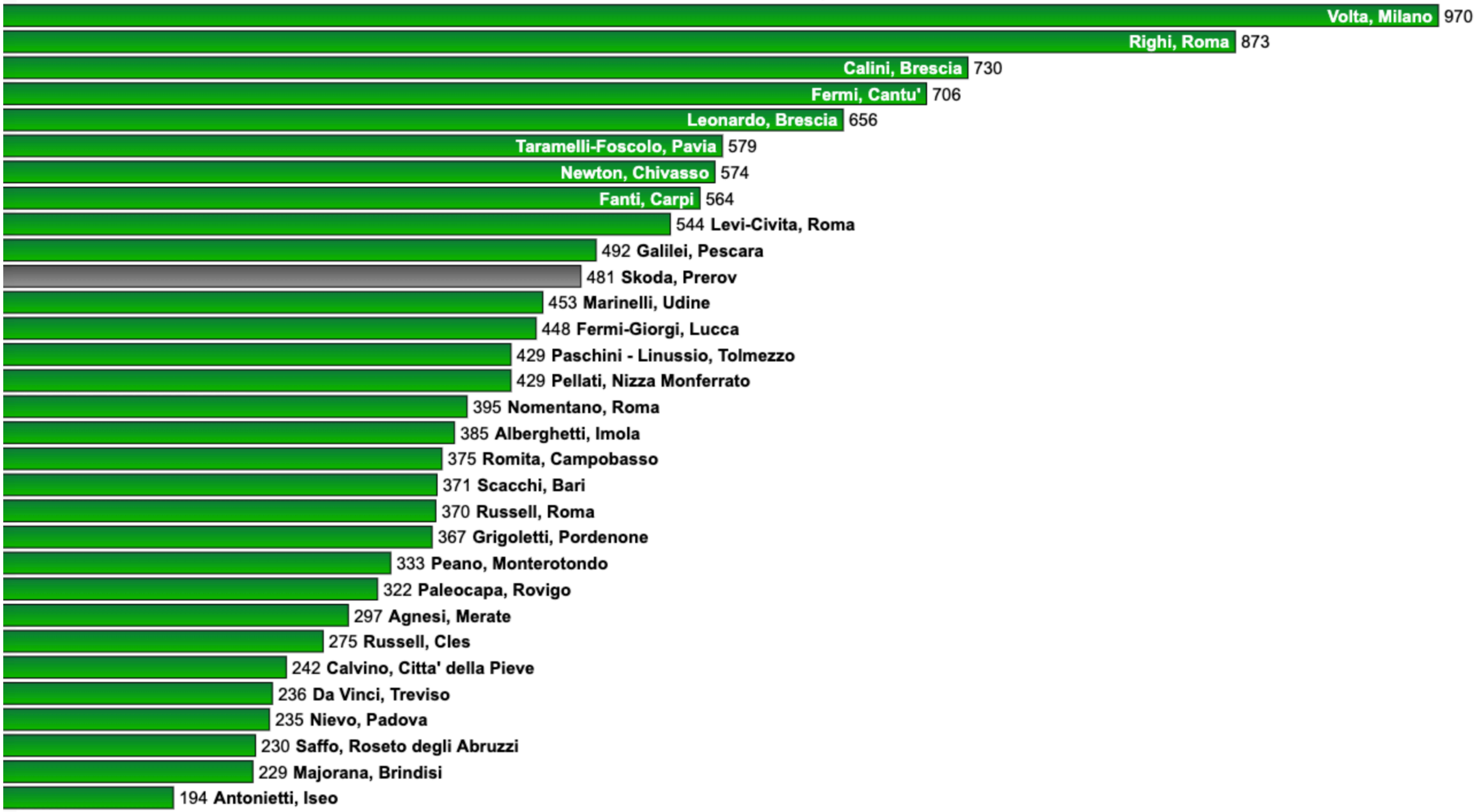
Ministero dell'Istruzione e del Merito

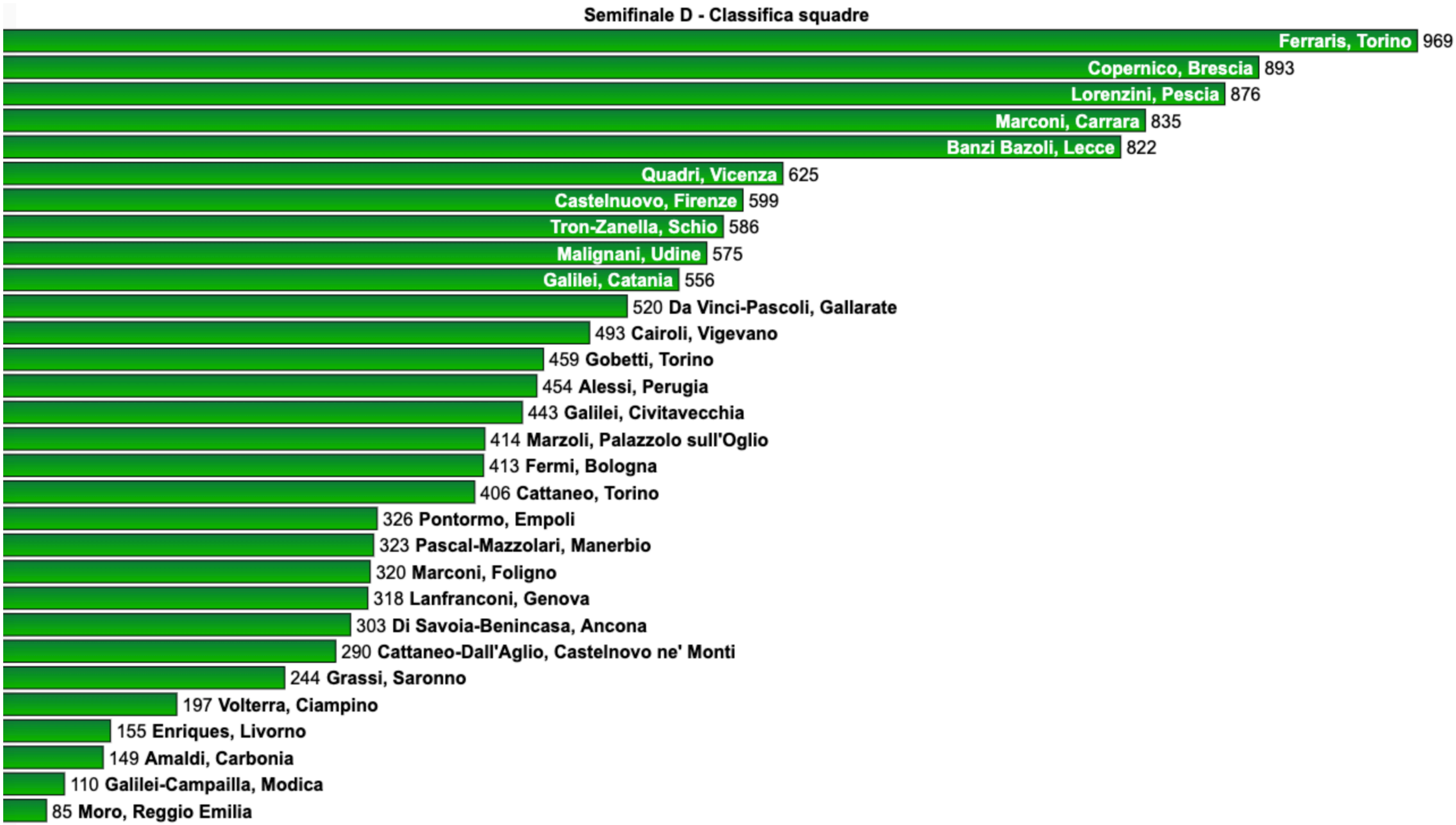
HUAWEI

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Colorare il bordo	0030
2	Zattere quadrate	0240
3	Triangoli areati	3420
4	Un samaterai aritmetico	2115
5	Nostalgia degli ultimi anni	0006
6	Furto quantistico	0023
7	Un taglio di squadra	0026
8	Un calcolo ammaliante	8760
9	M'ama non m'ama	1366
10	Il talento di Goemetrikon [$\star$]	3457
11	I milioni ben disposti	0320
12	Oltre il baricentro	0117
13	Gioco asimmetrico	0674
14	Paradosso statistico [$\star$]	0029
15	La stanza della statua	0072
16	La combinazione divisiva [$\star$]	3000

Semifinale C - Classifica squadre




Semifinale D - Classifica squadre
Ferraris, Torino 969
Copernico, Brescia 893
Lorenzini, Pescia 876
Marconi, Carrara 835
Banzi Bazoli, Lecce 822
Quadri, Vicenza 625
Castelnuovo, Firenze 599
Tron-Zanella, Schio 586
Malignani, Udine 575
Galilei, Catania 556
520 Da Vinci-Pascoli, Gallarate
493 Cairoli, Vigevano
459 Gobetti, Torino
454 Alessi, Perugia
443 Galilei, Civitavecchia
414 Marzoli, Palazzolo sull'Oglio
413 Fermi, Bologna
406 Cattaneo, Torino
326 Pontormo, Empoli
323 Pascal-Mazzolari, Manerbio
320 Marconi, Foligno
318 Lanfranconi, Genova
303 Di Savoia-Benincasa, Ancona
290 Cattaneo-Dall'Aglio, Castelnovo ne' Monti
244 Grassi, Saronno
197 Volterra, Ciampino
155 Enriques, Livorno
149 Amaldi, Carbonia
110 Galilei-Campailla, Modica
85 Moro, Reggio Emilia

Olimpiadi della matematica Semifinale C (05/05/2023)

#	Squadra	Tot.	D.1 35	D.2 57	D.3 42	D.4 48	D.5 27	D.6 30	D.7 38	D.8 56	D.9 55	D.10 95	D.11 97	D.12 95	D.13 60	D.14 95	D.15 54	D.16 97
1	Volta [Milano]	970	25	47	62	68	27	33	53	49	60		112	115	120 J		49	-10
2	Righi [Roma]	873	-65	57	42	8	32	50	-12	56	-30		107	110	75		49	234 J
3	Calini [Brescia]	730	35	17	42	63	27	30	38	46	35				140 J			97
4	Fermi [CantÃ¹]	706	55	77	42	58	37	45	86 J	46	60				60	-10	-10	
5	Leonardo [Brescia]	656	25	57	42	48	42	30	38	56	-40				60		148 J	-10
6	Taramelli-Foscolo [Pavia]	579	50		-10	-10	27	30	18	92 J	45		117		60			
7	Newton [Chivasso]	574	25	62	42		27	30	38	36	-40			-30				224 J
8	Fanti [Carpi]	564	35	57	42		17	35	-10	56	25				53		94 J	
9	Levi-Civita [Roma]	544	40	47	47		7	30	58	-30	-10			105	120 J		-10	-20
10	Galilei [Pescara]	492	25		-10	48	27	20	28	152 J	-10				-20			72
11	Marinelli [Udine]	453	-40	47	94 J	-10	27	30	-10	56	75						34	-10
12	Fermi-Giorgi [Lucca]	448	15	47	-10	-20	27	20	38	61	45				65	J		
13	Pellati [Nizza Monferrato]	429	-40	57	42	-10	27	20		-20	65						128 J	
14	Paschini-Linussio [Tolmezzo]	429	35	72	42		27	30	28		45					J		-10
15	Nomentano [Roma]	395	35	57	-20		27	30		56	70 J			-10				-10
16	Alberghetti [Imola]	385	15	47	-20	-10	54 J	30	38	46	55		-20				-10	
17	Romita [Campobasso]	375	-10	47	22	53	27	30	96 J	-10	-20		-10					-10
18	Scacchi [Bari]	371	15		42		47	-10		112 J	25				-10	-10		
19	Russell [Roma]	370	-15	57	42		54 J	10	41	61	-10							-30
20	Grigoletti [Pordenone]	367	35	57	42		27	10	38	-10	48				-40 J			
21	Peano [Monterotondo]	333	-10				54 J	30	18	46	35							
22	Paleocapa [Rovigo]	322	38	57	52		27	20	38		-20						-40 J	-10
23	Agnesi [Merate]	297	-30	50	32		7	30	38	-10	-20		-10		60	J	-10	
24	Russell [Cles]	265	5	-20	-30		17	20	-10	-10	25						108 J	
25	Calvino [CittÃ Della Pieve]	242	-40	47	42		27	20	-10	46	-30					-20 J		
26	Da Vinci [Treviso]	236	-40		35		27	30	28	46	-10		-40 J					
27	Nievo [Padova]	235	25		32		30	30	18	-20	-40 J							
28	Saffo [Roseto degli Abruzzi]	230	-10	-20	42	51	17	30			-30		J				-10	
29	Majorana [Brindisi]	229	25		-10		54 J	30	-10	-20								
30	Antonietti [Iseo]	194	25		42		27	30	-60 J	-10	-20							

Olimpiadi della matematica Semifinale D (05/05/2023)

			D.1 34	D.2 37	D.3 30	D.4 36	D.5 31	D.6 34	D.7 49	D.8 49	D.9 63	D.10 95	D.11 75	D.12 79	D.13 53	D.14 97	D.15 54	D.16 64
1	Ferraris [Torino]	969	34	40	50	46	21	34	64	52	33	230 J		99	-30		57	79
2	Copernico [Brescia]	893	24	37	30	46	31	24	32	69	83			82	53		54	168 J
3	Lorenzini [Pescia]	876	34	42	30	36	31	34	39	49	53	220 J		94			64	-10
4	Marconi [Carrara]	835	39	37	30	51	31	54	69	59	-40		95	148 J	53		59	-10
5	Banzi Bazoli [Lecce]	822	24	37	45	36	21	34	49	49	78		85		-20	224 J		
6	Quadri [Vicenza]	625	34	57	30		51	24	49	64	-10		-10		48		128 J	
7	Castelnuovo [Firenze]	599	27	27	30		31	14	-10	-10	48				68	214 J		
8	Tron-Zanella [Schio]	586	44		30	-20	31	34	49	39	73				146 J			
9	Malignani [Udine]	575	24	37	30		31	24	49	108 J	53							59
10	Galilei [Catania]	556	14	37	20		31	34	-10	39	53		90				88 J	
11	Da Vinci-Pascoli [Gallarate]	520	14	37	30	-10	21	34	49	49	86 J		80	-10		-20		
12	Cairoli [Vigevano]	493	24	47	33	16	34	34	49	-30	-20			-10	112 J		44	
13	Gobetti [Torino]	459	34	-30	-20	-20	31	44		39	43			178 J				
14	Alessi [Perugia]	454	34	37		39	41	98 J	39	-20	56				-10		-20	
15	Galilei [Civitavecchia]	443	34	37	20		21	34	118 J	49	-10				-10			-10
16	Marzoli [Palazzolo sull'Oglio]	414	34	37	30	26	36	39	39	29	-30		-40 J					54
17	Fermi [Bologna]	413	34	37	30	-20	31	34	49	98 J	-10			-10		-10	-10	
18	Cattaneo [Torino]	406	34	52		41	31	34	49	39	33	-10			53		-30	-80 J
19	Pontormo [Empoli]	326		37	30		31	-20	49				-20 J		-10		69	
20	Pascal-Mazzolari [Manerbio]	323	-30	37	40		46	34	-20	-10					66 J			
21	Marconi [Foligno]	320	54		-10	-10	31	27	108 J		-40							
22	Lanfranconi [Genova]	318	24	37			11	24	39		43		-20 J					
23	Di Savoia-Benincasa [Ancona]	303	34	-10	20	36	21	34	49	-1	-10		-10				-20 J	
24	Cattaneo-Dall'Aglio [Castelnovo ne' Monti]	290	4	37	-20		31	24	-10	-40	-10							114 J
25	Grassi [Saronno]	244	34	-10		36	31	34	-10	29	-10		J		-20	-20		-10
26	Volterra [Ciampino]	197	49	27	30		21			-60 J	-30							
27	Enriques [Livorno]	155	-20	-10	35					-10			J					
28	Amaldi [Carbonia]	149	34		-20		31	34			-30							-60 J
29	Galilei-Campailla [Modica]	110	-30	-20	-10		1		49	-10	-10							-20 J
30	Moro [Reggio Emilia]	85	-40				31	14		-30	-40 J						-10	

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Finale Nazionale – Sabato 6 Maggio 2023

HUAWEI

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Prima parte: il piano di Krull

1. $10\,000$ **minions in fila**

Krull è un supercattivo criminale, ma dall'animo buono... Oggi è agitato perché pensa che non è ancora riuscito a rubare la luna! Per rilassarsi gli piace pensare a problemi matematici. Scende allora nel suo laboratorio e prende $10\,000$ minions, suoi fidati aiutanti, numerati da 1 a $10\,000$. Poi decide di metterli in fila in modo tale che la più piccola delle $9\,999$ differenze in valore assoluto tra i numeri di due minions consecutivi sia più grande possibile. Quanto vale questa differenza?

2. Anche i cattivi lasciano la mancia

Krull è talmente cattivo che, per saltare la fila al caffé, congela tutti con il suo raggio congelante e poi prende la tazza di caffè in mano alla barista esterrefatta dalla scena. Quindi Krull se ne va via fischiettando, ma non prima di aver messo nel barattolo delle mance una moneta di forma circolare di raggio $\sqrt{3}\,cm$. Il barattolo è un prisma retto con base un esagono regolare E di lato $10\,cm$. Supponendo che la moneta sia caduta piatta sul fondo del barattolo, qual è la frazione di area di E su cui il centro della moneta può essere atterrato? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

3. Minion di Collatz

Il Dr. Nefarey sta sperimentando con dei minion un nuovo tipo di gas triplidimezzante. Se chiusi in una stanza piena di questo gas, succedono delle cose strane. Se i minions sono in numero pari, si dimezza il loro numero, ma se sono in numero dispari, si moltiplicano fino a raggiungere il triplo della popolazione iniziale, più uno. È un comportamento peculiare, visto che sembra che alla fine del processo rimanga sempre un minion solo!

Il Dr. Nefarey vuole capire da quali quantità di minions può partire per arrivare ad un certo punto ad avere esattamente 10 minions. Per esempio, se mette nella stanza 20 minions, il numero di minions diventa immediatamente 10. A questo punto il professore sta cercando di trovare i più piccoli 10 numeri iniziali di minions, maggiori di 10 e diversi da 20, che permettono di avere esattamente 10 minions. Qual'è la somma di questi 10 numeri?

4. Test della guardia

Dopo aver scoperto che qualcuno è riuscito a rubare la piramide di Cheope, Krull decide che è finalmente l'ora di rubare la luna! Per farlo però ha bisogno di un prestito dalla banca del crimine. Per testare le qualità di supercriminale, all'entrata della banca la guardia chiede: "Quanto vale la somma di tutti i quadrati perfetti, con almeno due cifre, tali che tutte le cifre tranne la prima da sinistra sono dei 4?". Cosa deve rispondere Krull per poter entrare e parlare con il direttore?

5. Come rubare una piramide

Nella sala d'attesa, Krull incontra Vector, colui che è riuscito a rubare la piramide. Incuriosito, gli chiede come ci è riuscito. Tronfio, Vector gli risponde: "Devi immaginarti due circonferenze Γ_1 e Γ_2 rispettivamente di raggi 7 e 41, tangenti esternamente nel punto P. Poi prendi r una retta tangente ad entrambe le circonferenze e sia Q il punto di tangenza di r con Γ_2 (che è diverso da P). Presa R l'intersezione distinta da P tra la retta PQ e Γ_1, considera poi s la retta tangente a Γ_1 in R. Ti sarebbe chiaro come ci sono riuscito se tu sapessi quanto è distante la retta s dal centro di Γ_2!". "Eeeeh? E come mi aiuterebbe a capirlo?". Rispondi con la distanza di s dal centro di Γ_2.

6. Stuzzichini di benvenuto

Krull prende in affido Maria, Gaetana e Agnese, affinché si possano infiltrare a casa di Vector. Le accoglie con alcuni stuzzichini di benvenuto: 5 tranci di pizza, 4 sfilatini al formaggio e 3 involtini di zucchine. I quattro mangiano tutto e nessuno resta a digiuno. In quanti modi possono farlo, sapendo che gli stuzzichini non vengono divisi in parti più piccole?

7. Passatempo I: Gaetana e il suo triangolo murale

Maria, Gaetana e Agnese si stanno annoiando a casa di Krull e allora ognuna di loro pianta un chiodo nel muro, per divertirsi... I tre chiodi formano un triangolo ABC. Gaetana, che ama la geometria, prende un bel pennarello nero e disegna il baricentro G del triangolo sul muro, e successivamente anche H, il piede dell'altezza relativa ad A e K il piede della perpendicolare a BC condotta da G. Quanto vale il rapporto $\frac{GK}{AH}$? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

8. Passatempo II: Dove prende le palline Agnese?

Agnese trova due barattoli dove sono presenti delle biglie esplosive. Deve prendere N biglie per andare a giocare con le sorelle, e si accorge che se le prende tutte dal primo barattolo, poi nel secondo ci saranno 23 volte le biglie rimaste nel primo barattolo; se invece le prende tutte nel secondo barattolo, le biglie nel primo risulteranno 88 volte quelle rimaste nel secondo. Qual è il numero minimo di biglie che servono ad Agnese?

9. Passatempo III: Maria e gli scacchi

Maria è un'amante degli scacchi, e per passare il tempo decide di giocare al seguente solitario, sperando che duri molto... Posiziona quattro cavalli ai vertici di una scacchiera 3×3. Poi muove i cavalli come negli scacchi, da un vertice ad un altro di un sottorettangolo 2×3 della scacchiera. Inizialmente, $n = 0$. Ad ogni turno, Maria compie le seguenti operazioni:

- muove ognuno dei cavalli in una casella che può legalmente raggiungere, scelta a caso, indipendentemente, con probabilità uniforme: in questa operazione non è un problema se due o più cavalli si trovano nella stessa casella.
- incrementa n di 1.
- se più cavalli si trovano nella stessa casella, li rimuove tutti tranne uno.

Se al termine di un turno rimane un solo cavallo, il gioco termina. Quanto vale n, in media, quando il gioco finisce?

10. $10\,000$ minions da dividere

Krull deve dividere $10\,000$ minions in gruppi, affinché svolgano diverse mansioni. Per farlo, decide di usare questa procedura strampalata: innanzitutto li numera da 1 a $10\,000$. Poi ogni minion deve prendere il suo numero a, scriverlo in base 3 e cancellare le cifre 2. Poi, se sono presenti più di due cifre 1, deve eliminare tutte le cifre più a sinistra del secondo 1 a partire da destra; il numero binario che si ottiene è il numero della squadra (eventualmente 0) a cui verrà assegnato a quel minion. Ad esempio il minion $115 = \underline{11021}_3$ viene assegnato alla squadra $\underline{101}_2 = 5$. Quante squadre comporrà in questo modo Krull?

11. Rituale della buonanotte

Dal momento che Krull non legge la storia della buonanotte, Gaetana per addormentarsi scrive alla lavagna i quadrati dei numeri naturali n da 10 a 2023 (quindi scrive $100, 121, \ldots, 4\,092\,529$). Successivamente Agnese cancella le ultime tre cifre (unità, decine e centinaia) di ogni numero scritto. Quindi Maria rimbocca loro le coperte e osservando i numeri che restano, si chiede: quanti sono i numeri naturali compresi tra 1 e 4092 che *non* compaiono sulla lavagna?

Seconda parte: l'attuazione

12. Un dolce ingresso [$\star$]

Le tre bimbe si infiltreranno a casa di Vector con la scusa di vendere biscotti facendolo scegliere tra 82 tipi diversi. I minions si occupano di cucinarli: preparano teglie da 68 biscotti; una teglia del primo tipo, due del secondo tipo e così via, fino all'82-esimo tipo di biscotto di cui ne infornano 82 teglie. Le confezioni le ha procurate il Dr. Nefarey, che però ha capito male al telefono e le ha prese da 83 biscotti l'una. Sapendo che in ogni confezione vengono messi biscotti di un solo tipo, e che tutti i biscotti cucinati vengono confezionati, qual è il numero minimo di confezioni che i minions dovranno usare?

13. La casa quadratica di Vector [$\star\star$]

La casa di Vector è costruita attorno alla piscina dove vive il suo squalo: essa è un triangolo ABC con $AB = 20m$, $AC = 23m$ e $BC = 29m$. Sul lato BC viene costruito il quadrato BCC_1B_2, nella stessa parte di piano in cui si trova il triangolo. Analogamente vengono costruiti CAA_1C_2 e ABB_1A_2. I lati di questi tre quadrati costituiscono le mura della casa. I condotti per l'aria condizionata sono B_1B_2 e C_1C_2; essi intersecano A_1A_2, rispettivamente, in P e Q. La retta per P perpendicolare ad AB e la retta per Q perpendicolare ad AC si incontrano in X, la presa d'aria centrale, da cui Krull dovrà scendere senza farsi vedere da Vector. il corridoio AX, che passa sopra la piscina interseca la circonferenza circoscritta ad ABC nuovamente in Y (che è finalmente l'uscita!). Determinare $AX \cdot XY$ in m^2. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

14. Tiro al bersaglio

Per festeggiare il successo della missione Krull e le tre bimbe si recano al Luna Park. Lo stand del tiro al bersaglio è stato costruito per minimizzare l'area da poter colpire. Il tabellone è formato da una serie di quadrati affiancati; la somma delle lunghezze dei loro lati è $2023\,mm$ e ciascuno ha come lato un numero intero di mm. Inoltre i quadrati sono tutti di dimensioni diverse. Qual è la minima area totale del tabellone in mm^2?

15. Un minion davvero mignon

Kelvin sta portando il raggio restringente nel locale di sicurezza, che è una stanza con le pareti a specchio. La planimetria della stanza è un quadrilatero $ABCD$ tale che $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{CDA} = 90°$, $\widehat{BCD} = 36°$, $BC = 2{,}8m$ e $BD = 1{,}8m$. Kelvin è nel vertice A e giocando con il raggio restringente accidentalmente spara puntando sul lato BC, parallelamente al pavimento e il raggio, dopo aver colpito una volta la parete BC e una volta la parete CD, torna di nuovo sul punto A, chiudendo un percorso triangolare e restringendo lo sprovveduto Kelvin. Qual è la lunghezza complessiva percorsa dal raggio, in cm?

16. La cerimonia del tè

L'esercito dei minions sta costruendo il razzo che permetterà a Krull di rubare la luna. Nel frattempo i minion Stewart, Kelvin e Bob tengono impegnate le tre bimbe.

Maria, Gaetana e Agnese si apprestano a giocare alla cerimonia del tè. Si trovano sui vertici di un triangolo di lati $AB = 165\,cm$, $BC = 220\,cm$ e $AC = 275\,cm$. I minion Stewart e Kelvin si trovano rispettivamente in S, il piede della bisettrice uscente da A e in K, il piede dell'altezza relativa a B. Arriva un po' in ritardo Bob, che si siede sul piede dell'altezza relativa ad S del triangolo ACS; finalmente tutti possono iniziare a sorseggiare il tè! Quanto distano in cm Bob e Kelvin?

17. Traiettoria per l'allunaggio [$\star$]

Il Dr. Nefarey sa che la *complessità binaria* $c(n)$ di un numero naturale n è il minimo numero di potenze di 2 necessario per scrivere n come somma o differenza di potenze di 2. Ad esempio $c(4) = 1$ poiché $4 = 2^2$, $c(15) = 2$ poiché $15 = 2^4 - 2^0$ e $c(23) = 3$ infatti $23 = 2^4 + 2^3 - 2^0$. Per settare la traiettoria in modo che il razzo raggiunga la luna deve calcolare $c(1) + c(2) + c(3) + \ldots + c(2047) + c(2048)$. Che valore ottiene?

18. Poltrone numerate in modo bislacco

Lo spettacolo di danza di Maria, Gaetana e Agnese si svolge in un teatro la cui platea è costituita da 2022 file da 2023 poltrone ciascuna. La numerazione è particolare e ripetitiva: nella prima fila i numeri sono, in sequenza, la prima e la 2022-esima riga del triangolo di Tartaglia (in quest'ordine), nella seconda fila i numeri sono, sempre in sequenza e in quest'ordine, la seconda e la 2021-esima riga del triangolo di Tartaglia, e così via. Quindi, per ogni j intero tra 1 e 2022, nella j-esima fila le poltrone sono state numerate con la j-esima riga e la $(2023 - j)$-esima riga del triangolo di Tartaglia. Inoltre, poltrone che sono collocate in posizione pari di una fila pari sono arancioni, mentre poltrone in posizione dispari di una fila dispari sono blu, e le restanti gialle. Quanto vale la differenza tra la somma dei numeri assegnati alle poltrone blu e la somma dei numeri assegnati alle poltrone arancioni?

19. Codice di rientro [$\star\star$]

Dopo aver recuperato la luna, Krull si accorge che potrebbe essere ancora in tempo per il balletto di Maria, Gaetana e Agnese. Allora cerca di immettere subito il codice di rientro $p(10)$, dove $p(x)$ è il polinomio $(x-1)^9$. Tuttavia nella fretta si confonde e considera invece $f(x)$, la funzione ottenuta copiando l'espressione di $p(x)$ e sostituendo ogni termine del tipo $a_n x^n$ con $a_n n^x$. Quanto vale $f(10)$, il numero veramente inserito da Krull?
*Si diano le **prime** 4 cifre del risultato.*

20. Il riscatto

Krull è arrivato troppo tardi: il balletto è finito e Vector ha rapito le tre bimbe. Ha lasciato però un biglietto in cui definisce $Q(n)$ come la somma dei numeri naturali minori o uguali ad n che non hanno fattori primi in comune con n (ad esempio $Q(1) = 1$, $Q(5) = 1+2+3+4$ e $Q(15) = 1+2+4+7+8+11+13+14$). Krull per riscattare le tre bimbe deve rispondere alla domanda lasciata da Vector in fondo al biglietto: quanti sono i numeri interi n compresi tra 1 e 100 tali che $Q(n)$ sia un multiplo di n?

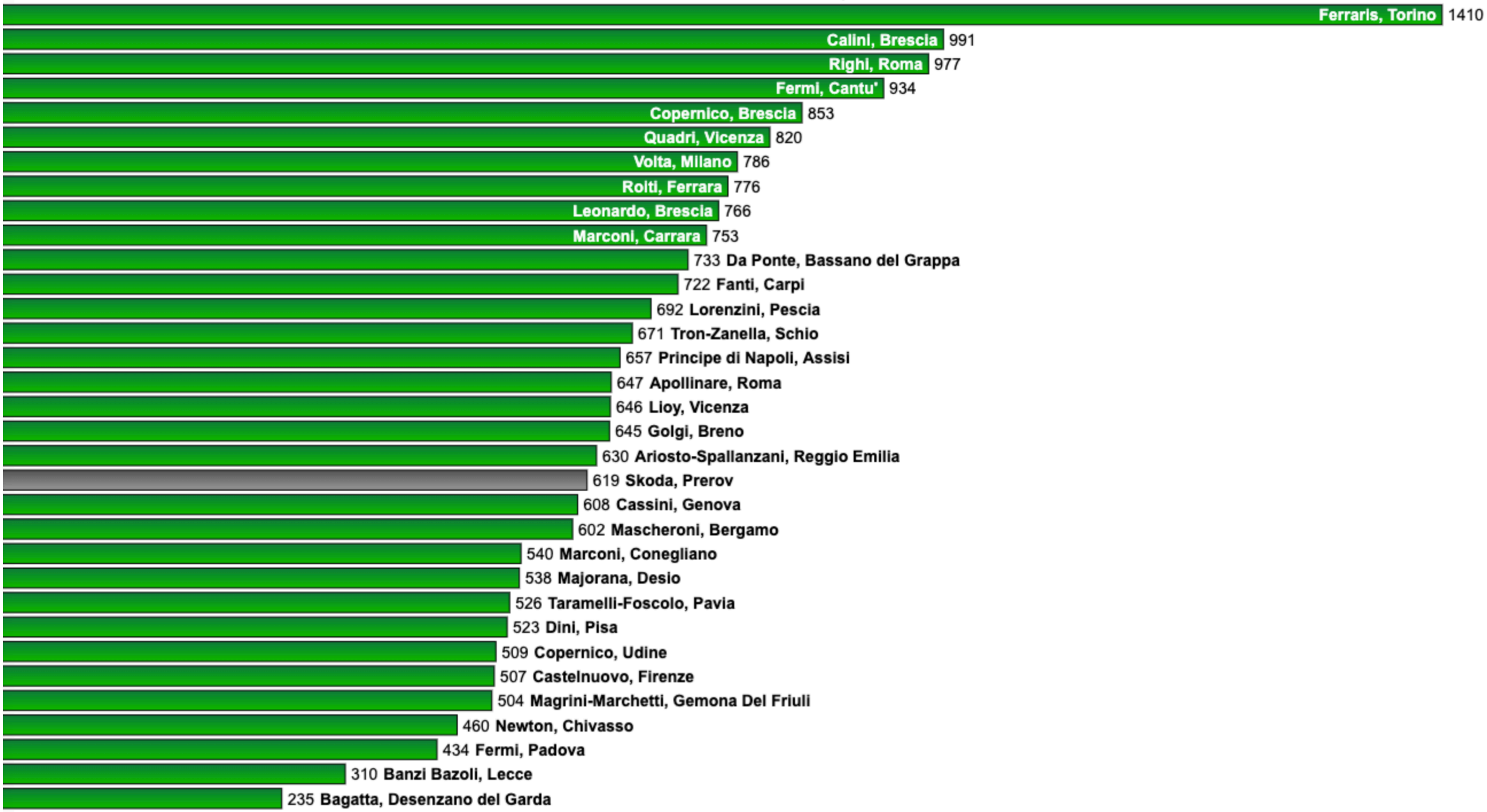
21. Festeggiamenti algebrici

Krull riesce a salvare le bimbe e rispedire la luna (insieme a Vector) in cielo. È tempo di festeggiare!! Quale modo migliore se non risolvendo un bel problema di algebra? Se $p(x) = x^3 - 23x^2 + ax - b^2$ è un polinomio con 3 radici intere (non necessariamente distinte) tale che a, b sono due numeri naturali, quali valori può assumere b? *Dare come risposta la somma di tutti i valori possibili.*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	10 000 minions in fila	5000
2	Anche i cattivi lasciano la mancia	0041
3	Minion di Collatz	0164
4	Test della guardia	1652
5	Come rubare una piramide	0027
6	Stuzzichini di benvenuto	7316
7	Passatempo I: Gaetana e il suo triangolo murale	0004
8	Passatempo II: Dove prende le palline Agnese?	2023
9	Passatempo III: Maria e gli scacchi	0010
10	10 000 minions da dividere	0046
11	Rituale della buonanotte	2319
12	Un dolce ingresso [$\star$]	2829
13	La casa quadratica di Vector [$\star\star$]	0593
14	Tiro al bersaglio	6191
15	Un minion davvero mignon	0360
16	La cerimonia del tè	0066
17	Traiettoria per l'allunaggio [$\star$]	8420
18	Poltrone numerate in modo bislacco	0001
19	Codice di rientro [$\star\star$]	1632
20	Il riscatto	0099
21	Festeggiamenti algebrici	0081

Finale Nazionale - Classifica squadre



Finale 2023 (06/05/2023)

#	Squadra	Totale	D.1 44	D.2 26	D.3 32	D.4 35	D.5 33	D.6 38	D.7 23	D.8 28	D.9 73	D.10 62	D.11 43	D.12 89	D.13 129	D.14 72	D.15 48	D.16 34	D.17 66	D.18 72	D.19 105	D.20 33	D.21 67
1	Ferraris [Torino]	1410	44	26	32	55	38	38	38	43	88	67	43	109	-10	87	-10	34	86	62	220 J	33	77
2	Calini [Brescia]	991	24	26	32	35	33	41	23	48	78	52	126 J			62		34	-10	77		33	67
3	Righi [Roma]	977	34	41	22	45	33	38	13	18	-20	35	43	89		72		34	162 J	75		33	
4	Fermi [CantÃ¹]	934	34	26	22	25	86 J	38	23	38	83	-30	43	82		72	58	34				23	67
5	Copernico [Brescia]	853	34	29	32	35	33	38	23	28		42	23			62		34		72		76 J	82
6	Quadri [Vicenza]	820	39	26	22	25		-10	23	28		52	48	99		22		74 J	-20	92	-10	33	67
7	Volta [Milano]	786	24	16	32	25	23	8	23	33	56	124 J	43			62		34				23	50
8	Roiti [Ferrara]	776	34	26	22	35	33	18	23	28		134 J	43			72	51	24				23	
9	Leonardo [Brescia]	766	34	26	22	-10	33	28	23	31		62				72	136 J	34		72		23	-30
10	Marconi [Carrara]	753	37	26	32	50	33	43	23	28	73	42		-10		77	48	78 J		-20	-40	33	-10
11	Da Ponte [Bassano del Grappa]	733	54	16	22		33	53	23	8	53	52	36	79		52	-10	24	-20 J			48	
12	Fanti [Carpi]	722	49	26	47	35	33	38	33	28	-10	62	86 J	-20			48	24				33	
13	Lorenzini [Pescia]	692	34	46	35	-10	106 J		28	28		62	53	-10	-10	-10	63	34				33	
14	Tron-Zanella [Schio]	671	34	26	32	35		-10	23	28		52	-10	79		72		34				66 J	
15	Principe di Napoli [Assisi]	657	34	26	52	35	33	48	23	28	J	62	-20			62		24				3	37
16	Apollinare [Roma]	647	34	26	32	35			23	56 J		62	33	69				34				33	
17	Lioy [Vicenza]	646	34	16	32		33	-30	23	28		164 J		89		-20		44				23	
18	Golgi [Breno]	645	44	26	32	56 J	23	-10	3	18		52				72		34		82		23	-20
19	Ariosto-Spallanzani [Reggio Emilia]	630	34	26	32	25	33	18	23	18		-10	23	94		-10		49		72	-20 J	13	
20	Cassini [Genova]	608	14	26	12	40	-10	38	23	28	93	62	-10			-20			-20	87	-40 J	33	42
21	Mascheroni [Bergamo]	602	34	16	32	25	33	-10	23	28						72	48	68 J				33	-10
22	Marconi [Conegliano]	540	34	26	37	-10	33	8	23	28				94		-10	J	34				33	
23	Majorana [Desio]	538	-20	26	32	35		-30	23	28		-10				-10		34	-10		230 J		
24	Taramelli-Foscolo [Pavia]	526	44	26	32		33	48	23		-10							34				106 J	-20
25	Dini [Pisa]	523	34	26	32	35	-30		43	8	-30	-10	-10			-20	106 J	54		62		33	-20
26	Copernico [Udine]	509	34	26	22	35	-10	-20	23	28			-30			92		34	-20	72		33	-20 J
27	Castelnuovo [Firenze]	507	34	36	22	35	48	-30	23	18		62		-30	-20 J	65		34					
28	Magrini [Gemona del Friuli]	504	34	31	32	25	33	-20	23	28	J	-10					48	34				36	
29	Newton [Chivasso]	460	34		32	35		-10	13	28			43			82		-30	-10		J	33	
30	Fermi [Padova]	434	34	26	32	25	36	-10	23	18			-20	-20				34				46 J	
31	Banzi Bazoli [Lecce]	310	34	-10	42	-10		-20	26	-20	73		38	-20		-10		34	-40 J		-20	13	-10
32	Bagatta [Desenzano del Garda]	235	34	26	-20				23		-30	32				-10			J		-30		
33	Skoda [Prerov (CZ)] (ospite)	619	34	16	32	35			46 J	28		82	48			-10				75		23	

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
VI FINALE NAZIONALE
(6 maggio 2023)

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare un numero intero compreso tra 0 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale *x* è il più grande intero minore od uguale ad *x*.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera cioè, in ordine, da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \qquad \sqrt{3} = 1,7321 \qquad \sqrt{5} = 2,2361 \qquad \sqrt{7} = 2,6458 \qquad \pi = 3,1416$$

CATTIVISSIMO ME

Con il contributo di:

Carlo Càssola
Liceo Scientifico "N. Copernico" di Udine

Claudia Manotti
IIS "B. Russell" di Guastalla

Lorenzo Mazza
Liceo Scientifico "Avogadro" di Roma

Michelangelo Sabatini
Liceo Scientifico "Gandhi" di Narni

Simona Pieri
Convitto Nazionale "Principe di Napoli" di Assisi

Simone Bertone
ISIS "Copernico-Luxemburg" di Torino

Un ringraziamento speciale a:

Santina De Monte
ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

Ugo Tomat
Laureato in Matematica

Regia di:

Sandro Campigotto
UMI Commissione Olimpiadi
ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

1. FURTO IN EGITTO (Lorenzo Mazza)

Tutti i telegiornali del mondo stanno trasmettendo una notizia incredibile. Qualcuno ha rubato la Piramide di Giza lasciando al suo posto una gigantesca copia gonfiabile ed un biglietto: “Grazie n dove n è la somma delle cifre di $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots99}_{2023\ volte}$.” Chi sarà il cattivo che è riuscito nell’impresa, ma soprattutto, quanto vale n?

2. GRU (Carlo Càssola)

Felonius Gru è un aspirante supercattivo, famoso per essere una delle persone più perfide della città. Gru prova piacere a fare dispetti e a veder soffrire le altre persone. Ora sta passeggiando nel parco quando vede un bambino a cui è caduto il gelato. Si avvicina e gli chiede: “Se mi dici quanti sono i numeri k tali che dividendo 2023 per k, si ottiene come resto 43, ti ricompro il gelato.” Il povero bambino si mette a piangere… mentre Gru si allontana soddisfatto. Che numero avrebbe dovuto dare come risposta?

3. I BISCOTTI DI MARGO, EDITH E AGNES (Sandro Campigotto)

Tornato a casa Gru si distende sul divano quando qualcuno suona alla porta. Dallo spioncino vede tre bambine con in mano delle scatole di biscotti. La più grande dice: “Abbiamo 7 tipi di biscotti, A, B, C, D, E, F e G e per ciascuno di loro ne abbiamo 7 scatole. Se lei ci compra 7 scatole a sua scelta, le facciamo uno sconto ma le consigliamo di mangiarli in ordine, cioè prima tutti i biscotti delle scatole A, poi tutti quelli delle scatole B e così via. Lei sa in quanti modi diversi potrebbe mangiare 7 scatole di biscotti seguendo il nostro consiglio?” Gru calcola la risposta ma poi irritato dalle tre bambine imita una segreteria telefonica e fa credere loro di non essere in casa. Le ragazze si allontanano sconsolate. Che numero ha calcolato?

4. ASSEMBLEA DEI MINION (Lorenzo Mazza)

È l’amico e complice dottor Nefarius ad informare Gru del furto della piramide. Gru, arrabbiato, non perde tempo e convoca immediatamente all’interno del triangolo ABC l’assemblea dei Minions, gli “scagnozzi” che lo aiutano in tutte le sue imprese. Gru si trova proprio sull’ortocentro H quando si accorge che $AC = BH$. Quanto vale, in gradi, l’ampiezza dell’angolo $A\hat{B}C$?

5. IL GRANDE ANNUNCIO (Carlo Càssola)

“Miei Minions… se $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ($\forall \ x > 0$ e $x \neq 1$) e $f_n(x) = f_0\left(f_{n-1}(x)\right)$, quanto vale $f_{2023}(2023)$? Non sapete rispondere… e allora rispondete a questo (*pausa d’effetto*): RUBEREMO LA LUNA!!!” Il grido di gioia dei Minions soffoca la voce del dottor Nefarius che con il suo computer aveva già calcolato la soluzione. Che valore ha trovato? Se la soluzione è una frazione, dai come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

6. ISTITUTO FEMMINILE DELLA SIGNORA HATTIE (Lorenzo Mazza)

Nel frattempo le tre piccole Margo, Edith e Agnes camminano verso l’orfanotrofio dove vivono facendo un gioco. Agnes dice un numero k_0 pari. Edith e Margo rispondono a turno. Edith dice $k_1 = 2k_0$, Margo $k_2 = 3k_1$. Le due ragazze continuano a rispondere a turno, ogni volta calcolando $k_i = (i+1)k_{i-1}$. Quando arrivano davanti alla porta dell’Istituto della Sig.ra Hattie, Margo si accorge che il numero k_{100} che ha appena calcolato è divisibile per 3^{53}. Qual è il più piccolo valore di k_0 che può aver detto inizialmente Agnes?

7. LA BANCA DEI CATTIVI (Simona Pieri)

Per realizzare il suo progetto Gru ha bisogno di soldi, così decide di recarsi alla Banca dei Cattivi per chiedere un prestito. Tutti i cattivi sanno che la banca è nascosta dietro ai bagni della Central Bank, ma per accedervi bisogna risolvere il problema che si trova sulla salvietta che ti capita quando ti lavi le mani. A Gru tocca un problema di geometria. Un triangolo equilatero ABC ha il lato lungo $32\ \mathrm{cm}$. Siano D, E ed F appartenenti a BC, AC e AB tali che AD è perpendicolare a BC, DE è perpendicolare ad AC ed infine EF è perpendicolare ad AB. Detta G l’intersezione tra AD ed EF, quanto vale in cm^2 l’area di $BFGD$? Che valore serve a Gru per accedere alla Banca dei Cattivi?

8. SALA D'ATTESA (Simona Pieri)

In attesa di essere ricevuto dal direttore della banca, Gru fa la conoscenza di un altro supercattivo, un ragazzo che dice di chiamarsi Vector. Il ragazzo racconta: "Ho considerato un tetraedro regolare $ABCD$ di lato $2424\ \mathrm{cm}$ e ho chiamato G il suo baricentro e G' il baricentro della faccia ABC. Calcolare la distanza di G' dal piano che passa per A, B e G è stato uno scherzo, come rubare la Piramide di Giza." Gru sorpreso e arrabbiato estrae il raggio congelante e prima di entrare nell'ufficio del direttore congela, per dispetto, la testa di Vector. Quanto vale la distanza calcolata da Vector in cm?

9. PRESTITO NEGATO (Claudia Manotti)

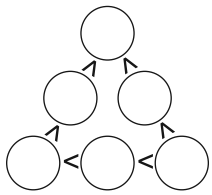
Accolto dal direttore della banca, Gru espose il suo piano per rubare la Luna nei minimi dettagli. Il direttore chiese a Gru, quale garanzia, di risolvere il seguente problema: in una lunghissima strada su case numerate da 1 fino 10.000, abitano degli gnomi, uno per ogni casa. Gli gnomi sono tutti sinceri. Un giorno, per una mutazione, lo gnomo della casa 2023 diventa mentitore. Da quel giorno gli gnomi possono cambiare la loro natura di notte (da sinceri a mentitori e viceversa). Questo avviene se e solo se il giorno prima erano vicini ad esattamente un mentitore. Quando sono passate 1024 notti da quel giorno, chiedendo ai primi 2023 gnomi se la loro casa ha il numero pari, in quanti rispondono sì? Mentre Gru sta ancora facendo i calcoli, il direttore lo interrompe chiedendogli se possiede il raggio restringente. Alla risposta "no" di Gru, lo caccia fuori dalla banca negandogli il prestito. Qual è la risposta al problema del direttore?

10. IL RAGGIO RESTRINGENTE (Michelangelo Sabatini)

Saputo che in un laboratorio di ricerca cinese un gruppo di ricercatori ha costruito il raggio restringente, Gru, assieme ai Minions è volato a rubarlo. Gru ha scoperto che i codici per attivare il raggio sono stringhe $ABxyzCD$ dove A, B, C e D indicano una delle 5 possibili vocali e x, y e z una delle 10 possibili cifre. Ogni stringa deve essere "quasi palindroma", cioè non deve essere palindroma ma diventarlo cambiando uno solo dei sette caratteri. Quanti codici fanno funzionare il raggio? Dai la risposta divisa per 10.

11. LA VENDETTA DI VECTOR (Sandro Campigotto)

Mentre Gru rientra alla base con la sua astronave, viene attaccato da Vector, che su un mezzo tecnologicamente avanzato, gli ruba il raggio restringente. Dopo vari scambi con armi da fuoco, Vector decide di usare il raggio restringente contro l'astronave di Gru. Per attivarlo deve riempire lo schema (a fianco riportato) rispettando i segni di disuguaglianza con 6 diversi numeri da 1 a 9. In quanti modi può farlo?



12. IL COVO DI VECTOR (Sandro Campigotto)

Gru sta provando ad espugnare il covo del nemico in tutti i modi possibili, ma il sistema d'allarme avverte sempre Vector dei suoi tentativi. Alla fine Vector, stufo di giocare con Gru, attiva la funzione di difesa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 256$ dove a, b e c sono numeri interi. Vector sa che $f(a) = 1$, $f(b) = 1$ e $f(c) = 1$. Calcola il valore $f(5)$ e così facendo attiva le armi pesanti che respingono Gru. Che valore ha permesso a Vector di battere l'avversario?

13. ADOZIONI (Sandro Campigotto)

Dopo essere stato umiliato, Gru nota le tre ragazze Margo, Edith e Agnes che suonano alla porta di Vector e, con sua grande sorpresa, vede che Vector, goloso di biscotti, le accoglie in casa. Gru ha così un'idea luminosa. Decide di adottare le tre ragazze per poter rubare il raggio restringente. Si presenta così travestito da dottore all'orfanotrofio della signora Hattie, chiedendo di poter adottare le tre fanciulle: potrà farlo se riesce a calcolare qual è la probabilità di estrarre due numeri da un'urna che contiene tutti i numeri primi minori di 40, tali che il prodotto dei due numeri estratti aumentato di uno sia un quadrato perfetto. Quale probabilità permette a Gru di adottare le tre bimbe? Dai il risultato sommando il numeratore e denominatore della probabilità scritta sotto forma di frazione irriducibile.

14. I BISCO-ROBOT (Simona Pieri)

Mentre Gru è costretto a passare del tempo con le tre ragazze, portandole a danza e al Luna Park, il dottor Nefario sta predisponendo il piano ideato da Gru: la costruzione di mini biscotti robot. Il progetto dei bisco-robot prevede che siano di forma triangolare ABC (acutangolo) con $BA < AC$, $BC = 23\ \mathrm{mm}$, e $BA = 13\ \mathrm{mm}$. Se H è l'ortocentro ed F il punto sul segmento AC tale che $BF = 13\ \mathrm{mm}$, allora detto T il punto di intersezione tra FH e il prolungamento di BC, deve accadere che $BT = 13\ \mathrm{mm}$. Quanto vale l'area ABC di un bisco-robot?

15. CROWDFUNDING (Michelangelo Sabatini)

Il piano dei bisco-robot funziona e così Gru recupera il raggio restringente. Ora bisogna superare le difficoltà economiche per la costruzione del razzo. Sono le tre bambine che, donando il loro salvadanaio a Gru, innescano una raccolta fondi tra tutti i Minion. Alla fine vengono raccolte tante migliaia di dollari quante sono le coppie ordinate (a,b) di interi compresi tra 1 e 2023 inclusi, tali che $\mathrm{m.c.m}(a,b) < 7 \cdot \mathrm{MCD}(a,b)$. Quante migliaia di dollari ha a disposizione il dottor Nefarius per costruire il razzo?

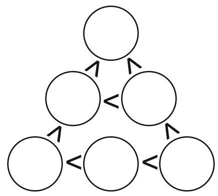
16. LA DECISIONE DI NEFARIUS (Claudia Manotti)

Oramai le tre bambine sono entrate nel cuore di Gru, che le segue e le accudisce come un padre. Questo non piace al dottor Nefarius che vuole riportare Gru alla ragione. Nefarius prende un dado regolare a 4 facce e lo lancia 7 volte. Al settimo lancio si accorge di aver visto almeno una volta tutte le facce e decide di telefonare all'orfanotrofio per denunciare Gru e costringerlo a restituire le bambine. Qual è la probabilità che al sesto lancio Nefarius non avesse ancora visto una delle facce? Dai come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

17. ROTTA VERSO LA LUNA (Carlo Càssola)

Oramai tutto è pronto. Il razzo è sulla rampa di lancio e Gru ha indossato la sua tuta spaziale… diventata rosa a causa di errato lavaggio assieme ai tutù delle tre ragazze. I Minions stanno calcolando la rotta per la Luna. Kevin ha riportato le traiettorie e le orbite tutte in scala ma gli manca ancora una lunghezza. Se rappresentiamo la situazione con due circonferenze C_1, di centro O_1 e raggio $r_1 = 21\ \mathrm{m}$, e C_2, di centro O_2 e raggio $r_2 = 25\ \mathrm{m}$, e tracciamo da O_1 le tangenti a C_2 esse incontrano C_1 in due punti A e B tali che il segmento AB è lungo $14\ \mathrm{m}$. Costruite le tangenti a C_1 uscenti da O_2, queste incontrano C_1 nei punti C e D. Qual è la lunghezza del segmento CD in cm?

18. HO RUBATO LA LUNA (Sandro Campigotto)



Giunto in orbita lunare Gru mette in atto il suo piano criminale. Per attivare il raggio restringente deve riempire lo schema (a fianco riportato) rispettando i segni di disuguaglianza con 6 diversi numeri da 1 a 9. Gru non ci mette molto e dopo poco può afferrare la Luna "ristretta" con una mano. In quel preciso momento si rende conto che fare il cattivo non gli interessa più e che darebbe qualunque cosa pur di essere al saggio di danza delle tre bambine. In quanti modi diversi avrebbe potuto riempire lo schema per attivare il raggio?

19. A CASA DI CORSA (Carlo Càssola)

Gru, messa in tasca la Luna, rientra nel razzo e decide di attivare il rientro rapido per cercare di raggiungere in tempo il teatro dove si svolge il saggio di danza. Il computer dell'astronave chiede di inserire la somma di tutti i numeri n di tre cifre (tutte diverse e diverse da 0) tali che la media aritmetica di tutti i numeri ottenuti permutando le sue cifre (incluso il numero di partenza) valga n. Gru inserisce il valore richiesto e riesce ad atterrare proprio fuori dal teatro, giusto in tempo per scoprire che Vector ha rapito le bimbe chiedendo la Luna come riscatto. Gru cede al ricatto, ma Vector non mantiene il patto. Quale numero ha permesso a Gru di attivare il computer di bordo?

20. TUTTO COME PRIMA (Claudia Manotti)

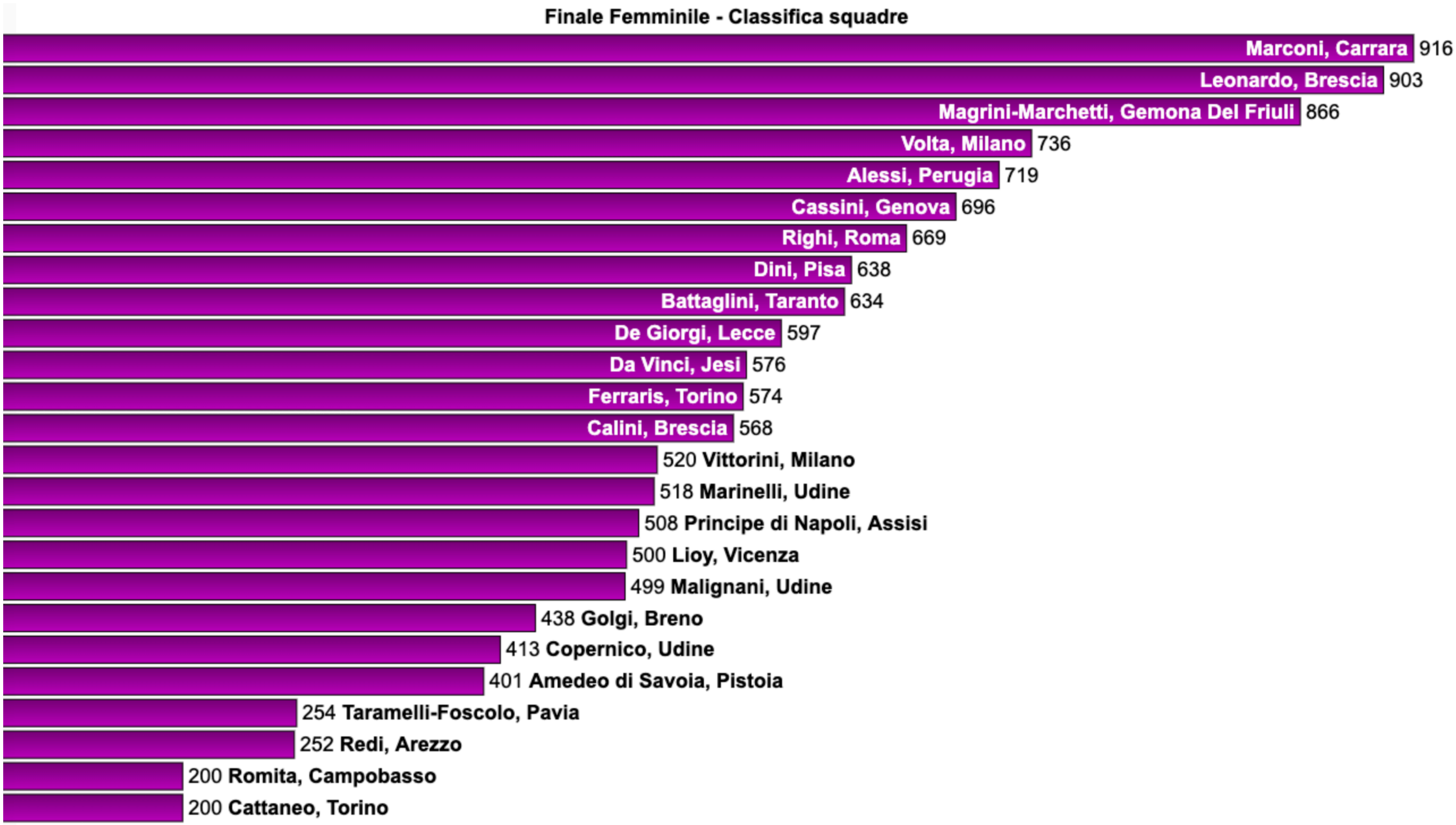
Al centro della faccia superiore di un cubo di spigolo $8\ \mathrm{cm}$ è piantato un bastoncino lungo $3\ \mathrm{cm}$ alla cui sommità è legato un filo sottile lungo $8\ \mathrm{cm}$. All'altra estremità è legato un micro Minion ristretto dal raggio restringente. Il dottor Nefario sta studiando quanto misura in cm^2 l'area della regione di superficie del cubo che il piccolo Minion può raggiungere, quando il piccolo, improvvisamente, ritorna alla grandezza normale. Evidentemente il raggio restringente ha un effetto limitato. Infatti anche la Luna si sta ingrandendo proprio mentre Gru e Vector si stanno scontrando nei cieli. Gru riesce a salvare le ragazze, mentre Vector rimane incastrato sulla Luna che torna alla sua dimensione e al suo posto naturale. Quale sarebbe stata la risposta al quesito di Nefario? Scrivi la risposta nel formato $a + \frac{b}{c}\pi + d\sqrt{e}$ (b e c primi tra loro ed e senza divisori quadrati) e dai come risposta $a+b+c+d+e$.

21. UN PADRE AFFETTUOSO (Michelangelo Sabatini)

Gru lascia la carriera da cattivo per diventare padre a tempo pieno. Ogni sera racconta una storia alle sue tre bambine. Questa sera la storia è quella del salmone Salomone e dei suoi fratelli che nuotano in fila indiana assieme ad altri salmoni. Un pescatore cattivo ha deciso che pescherà esattamente 3 salmoni. La probabilità che il pescatore ne prenda uno qualsiasi che gli passi davanti è $\frac{1}{3}$. Salomone si trova settimo nella fila e i sui fratelli sono il secondo e il quarto. Qual è la probabilità che Salomone si salvi assieme ai suoi due fratelli? Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	FURTO IN EGITTO	2043
2	GRU	0019
3	I BISCOTTI DI MARGO, EDITH E AGNES	1716
4	ASSEMBLEA DEI MINION	0045
5	IL GRANDE ANNUNCIO	4045
6	ISTITUTO FEMMINILE DELLA SIGNORA HATTIE	0486
7	LA BANCA DEI CATTIVI	0180
8	SALA D'ATTESA	0404
9	PRESTITO NEGATO	1013
10	IL RAGGIO RESTRINGENTE	4250
11	LA VENDETTA DI VECTOR	0336
12	IL COVO DI VECTOR	6049
13	ADOZIONI	0071
14	I BISCO-ROBOT	0138
15	CROWDFUNDING	9233
16	LA DECISIONE DI NEFARIUS	0044
17	ROTTA VERSO LA LUNA	4032
18	HO RUBATO LA LUNA	0252
19	A CASA DI CORSA	2220
20	TUTTO COME PRIMA	0102
21	UN PADRE AFFETTUOSO	0319


Finale Femminile - Classifica squadre
Marconi, Carrara 916
Leonardo, Brescia 903
Magrini-Marchetti, Gemona Del Friuli 866
Volta, Milano 736
Alessi, Perugia 719
Cassini, Genova 696
Righi, Roma 669
Dini, Pisa 638
Battaglini, Taranto 634
De Giorgi, Lecce 597
Da Vinci, Jesi 576
Ferraris, Torino 574
Calini, Brescia 568
520 Vittorini, Milano
518 Marinelli, Udine
508 Principe di Napoli, Assisi
500 Lioy, Vicenza
499 Malignani, Udine
438 Golgi, Breno
413 Copernico, Udine
401 Amedeo di Savoia, Pistoia
254 Taramelli-Foscolo, Pavia
252 Redi, Arezzo
200 Romita, Campobasso
200 Cattaneo, Torino

Finale Femminile 2023 (06/05/2023)

			D.1 31	D.2 48	D.3 35	D.4 41	D.5 37	D.6 40	D.7 35	D.8 126	D.9 126	D.10 35	D.11 47	D.12 50	D.13 34	D.14 120	D.15 107	D.16 107	D.17 126	D.18 49	D.19 50	D.20 124	D.21 119
1	Marconi [Carrara]	916	31	48	45	51	27	40	35		-20	25	47		34			244 J		49	50		
2	Leonardo [Brescia]	903	11	38	25		27	40	15			-10		55	54		127	-30	-10	49	-30	198 J	134
3	Magrini-Marchetti [Gemona Del Friuli]	866	31	38	25	41	37	30	30		-20	38	62		24			-30	141	69	140 J		
4	Volta [Milano]	736	36	58	50	44	52	20	35	146	-20	-20	67	70	34			-60	-60 J	54	30		-10
5	Alessi [Perugia]	719	31	38	40	-10	57	40	25			55	47		34			-20		52	130 J		-10
6	Cassini [Genova]	696		53		46	37	110 J	35		-10	-20	52		-20			-10	-10	49	50	134	-10
7	Righi [Roma]	669	-20	38	-30	41		40	50	-10		50	37		-10			234 J		49	-10		
8	Dini [Pisa]	638	31	48	35	46	37	40	25	-30	136	-10			-10	140	-40	-10	J				-10
9	Battaglini [Taranto]	634	-20	38		41	94 J	30			-10	5		65	39		107				55		-20
10	De Giorgi [Lecce]	597	21	18	35		37	45	35			90 J	37	-10	-10					39	50		
11	Da Vinci [Jesi]	576	-10	38		41			35			-10							272 J				
12	Ferraris [Torino]	574		-20				30	-10			-10	47		34		244 J			49			
13	Calini [Brescia]	568	11	51	-10		37	120 J	35			25	37	53	-30			-20		49			
14	Vittorini [Milano]	520	-10	-10	-10		37	-10	-20			25			-10				-10		50		278 J
15	Marinelli [Udine]	518		48		41		-10	25		141		57		37			-60 J		49			-20
16	Principe di Napoli [Assisi]	508	24	28	38			40	35	-10		15		50	88 J			-10					
17	Lioy [Vicenza]	500	31	28	35			40	35		-10	-10			98 J				-10		53		
18	Malignani [Udine]	499	-10	58	35	41	-20	-10	38			35	40		48 J		-20	-10		64			
19	Golgi [Breno]	438	36	-10	55		42	30	35	-20		-10	47		34		-40 J	-20		49			
20	Copernico [Udine]	413	51	43		41	30	43	25		J	30	-10		-40		-10						
21	Amedeo di Savoia [Pistoia]	401	-10	-40	-10	61	37	40	35					60	48 J				-30				
22	Taramelli-Foscolo [Pavia]	254	-40	-20				-10	90 J						34								-10
23	Redi [Arezzo]	252	-20	38					15			35			34	-40 J				-20			
24	Romita [Campobasso]	195	-10	-20					35			-20	J										
25	Cattaneo [Torino]	172		28	-20			-10	55	-100 J		35	-10		34			-20	-20		-10		

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana — Ministero dell'Istruzione e del Merito

Gara del pubblico – Sabato 6 Maggio 2023

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **60 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Il buongiorno si vede dal mattino

Krull, Lucy Wiles e le loro tre figlie Maria, Gaetana ed Agnese si ritrovano ogni mattina per fare colazione insieme. Di solito, ciascuno di loro mangia esattamente un cibo a scelta tra dei *biscotti*, un *panino* oppure una *mela* e beve esattamente una bevanda a scelta tra *latte*, *te* e *caffè*. Purtroppo, Krull e Lucy devono sempre stare attenti alle esigenze di tutti, infatti:

- la piccola Agnese è intollerante al lattosio e non può bere il *latte*;
- Maria non ha mai voglia di mangiare una *mela*;
- Gaetana non vuole bere il *latte* se non è accompagnato dai *biscotti*.

Inoltre, Krull e Lucy decidono di lasciare mangiare sempre i *biscotti* ai loro figli perché ce ne sono pochi e lasciano bere il *caffè* soltanto a Maria, oltre che a loro stessi. In quanti modi diversi può essere consumata la colazione?

2. Il sole del deserto

Krull incontra Vector, colui che è riuscito a rubare la piramide. Incuriosito, gli chiede come abbia fatto. Tronfio, Vector gli risponde: «Devi immaginarti due circonferenze Γ_1 e Γ_2 rispettivamente di raggi 8 e 52, tangenti esternamente nel punto P. Poi prendi r una retta tangente ad entrambe le circonferenze e sia Q il punto di tangenza di r con Γ_2 (che è diverso da P). Presa R l'intersezione distinta da P tra la retta PQ e Γ_1, considera poi s la retta tangente a Γ_1 in R. Ti sarebbe chiaro come ci sono riuscito se tu sapessi quanto è distante la retta s dal centro di Γ_2!». «Eeeeh? E come mi aiuterebbe a capirlo?». Rispondere con la distanza di s dal centro di Γ_2.

3. Noooo la piramide

Krull arrivò nel luogo dove la piramide era stata rubata. Sul triste terreno era incisa la seguente espressione:

$$\frac{1}{3^2-4} + \frac{1}{7^2-4} + \frac{1}{11^2-4} + \cdots + \frac{1}{95^2-4} + \frac{1}{99^2-4}$$

Quanto valeva? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

4. Segui le stelle

Krull sconsolato guardò il cielo e si ricordò di una celebre frase «Se tu segui tua stella non puoi fallire a glorioso porto». Ciò gli diede l'ispirazione per trovare tutti i polinomi f a coefficienti reali tali che

$$f(x^2) = f(2x-1) + (f(x))^2.$$

Quanto vale la somma dei possibili valori di $f(2023)$?

5. Trucchi gialli segreti

Krull chiede aiuto al Dr. Nefarey per rubare la luna. Il Dr. Nefarey sa che il trucco è conoscere il numero N con la seguente proprietà. Se lanciando dadi a 6 facce si vuole ottenere una somma pari a N, allora occorre lanciarne almeno k. Il trucco funziona solo se, lanciando esattamente k dadi, la probabilità di ottenere N è la stessa di ottenere 337. Sapendo che $N > 337$, quali sono i possibili valori del trucco del Dr. Nefarey? *Fornire come risposta la somma del più grande e del più piccolo N.*

6. Burle infantili

Kelvin e Stewart giocano tra di loro facendo molto baccano quando arriva Bob e dice loro "Smettetela di oziare, determinate invece i valori dell'intero positivo n tali che

$$8n^3+11n^2+16n-20$$

è un cubo perfetto." Quanto vale la somma dei valori ottenuti da Kelvin e Stewart?

7. SOS

Krull: «Dr. Nefarey, ho bisogno di aiuto. Sia $M=\{1,2,...,2040\}$ e per ogni intero compreso tra 1 e 2040 sia $a(n)$ il numero di sottoinsiemi di M con al più n elementi e con un numero pari di elementi, e sia $b(n)$ il numero di sottoinsiemi di M con al più n elementi e con un numero dispari di elementi. Qual è il massimo esponente k tale che 2^k divide il massimo di $|a(n)-b(n)|$ al variare di n?»
Dr. Nefarey: «Eh?»

8. Giochi pericolosi

Kelvin sta portando il raggio restringente nel locale di sicurezza, che è una stanza con le pareti a specchio. La planimetria della stanza è un quadrilatero $ABCD$ tale che $\widehat{ABC}=90°$, $\widehat{CDA}=90°$, $\widehat{BCD}=54°$, $BC=3,56m$ e $BD=3,24m$. Kelvin è nel vertice A e giocando con il raggio restringente accidentalmente spara puntando sul lato BC, parallelamente al pavimento e il raggio, dopo aver colpito una volta la parete BC e una volta la parete CD, torna di nuovo sul punto A, chiudendo un percorso triangolare e restringendo lo sprovveduto Kelvin. Qual è la lunghezza complessiva percorsa dal raggio, in cm?

9. Quesito molesto [⋆]

Krull: «Niente, niente, niente quesiti molesti. Chiaro?»
Agnese: «Questo vale come molesto? Sia x_n una successione tale che $x_0=1$ e $x_{n+1}=x_n^3+3x_n^2+2x_n$. Determinare il resto della divisione per 2023 di

$$\sum_{k=0}^{2024} 2^{2^{x_k}}.$$

Krull: «Molto».
Qual è la risposta al quesito di Agnese?

10. Triangoli gialli [⋆]

Maria disegna un triangolo equilatero ABC di lato 100 e Gaetana traccia una retta che interseca i lati AB e BC in P e Q rispettivamente, con $\overline{AP}=25$. In questo modo, il triangolo ABC viene tagliato in due parti aventi la stessa area. Agnese vuole tracciare una seconda retta RS, con R in AB e S in AC, in modo che ABC risulti diviso in 4 poligoni aventi la stessa area. Quanto deve valere $\overline{AS}$?

11. Il quesito di Agnese [⋆⋆]

Agnese: «Krull, un quesito per te!»
Krull: «Oh, no, ancora!»
Agnese: «Consideriamo le coppie (a,b) di interi positivi coprimi, con $a \leq b < 500$, tali che $a \mid b^2+5$ e $b \mid a^2+5$. Sia n il numero di tali coppie e B il massimo numero che compare in una di queste coppie. Quanto vale $n+B$?»

12. Il balletto [⋆⋆]

Dopo aver recuperato la luna, Krull si accorge che potrebbe essere ancora in tempo per il balletto di Maria, Gaetana e Agnese. Allora cerca di immettere subito il codice di rientro $p(10)$, dove $p(x)$ è il polinomio $(x-1)^9$. Tuttavia nella fretta si confonde e considera invece $f(x)$, la funzione ottenuta copiando l'espressione di $p(x)$ e sostituendo ogni termine del tipo $a_n x^n$ con $a_n n^x$. Quanto vale $f(11)$, il numero veramente inserito da Krull? *Rispondere con le prime 4 cifre del risultato.*

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Gara del pubblico – Sabato 6 Maggio 2023

HUAWEI

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Il buongiorno si vede dal mattino	2592
2	Il sole del deserto	0036
3	Noooo la piramide	0126
4	Segui le stelle	2022
5	Trucchi gialli segreti	4009
6	Burle infantili	0010
7	SOS	0007
8	Giochi pericolosi	0648
9	Quesito molesto [$\star$]	1756
10	Triangoli gialli [$\star$]	0053
11	Il quesito di Agnese [$\star\star$]	0340
12	Il balletto [$\star\star$]	4191