XXIV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 5-6 Maggio 2023

Ringraziamenti. La scrittura di tutti i testi riguardanti la fase finale delle Gare a Squadre ha richiesto l'aiuto di molteplici persone, nei ruoli di proposizione dei problemi, correzione dei problemi, ambientazione, beta-testing.

Ringraziamo dunque tutti i collaboratori: Alberto Cagnetta, Alessandro Fenu, Alessandro Iraci, Alessandro Tedeschi, Andrea Parma, Annalaura Pegoraro, Carlo Rotolo, Cecilia Moriggi, Chiara Ricciuti, Claudio Filippo Bianchi, Daniele Fedeli, Daria Pasqualetti, Davide Di Vora, Davide Pierrat, Edoardo Annunziati, Eduardo Venturini, Fabio Lilliu, Fabio Marconi, Federico Antonini, Federico Viola, Filippo Girardi, Flavio De Vincenti, Francesca Busato, Gianmaria Tomaselli, Giorgia Benassi, Giorgio Busoni, Giovanni Barbarino, Giovanni Caiolo, Giovanni Interdonato, Giovanni Marzenta, Giuseppe Di Fabio, Giuseppe Mascellani, Giuseppe Romanazzi, Iman Rosignoli, Lorenzo Benedini, Lorenzo Cortesi, Lorenzo Picinelli, Luca Ambrosino, Luca Macchiaroli, Lucio Tanzini, Mara Barucco, Massimiliano Foschi, Massimo Gasparini, Matteo Casarosa, Matteo Damiano, Matteo Nesi, Matteo Protopapa, Mattia Maculan, Michele Casella, Niocola Caravaggi, Riccardo Begliomini, Riccardo Moraschi, Roberto De Ferrari, Rubens Alessio Martino, Sebastiano Boscardin, Silvia Keira Kuzmin, Tiziana Eugenelo, Tommaso Dossi, Tommaso Faustini, Tommaso Lunghi, Valentino Badalucco, Wladimiro Gradi.

Un grazie particolare a coloro che hanno selezionato i testi: Federico Poloni, Leonardo Franchi, Marco Trevisiol, Matteo Migliorini, Silvia Pagani.

I responsabili scientifici
Maurizio Paolini e Simone Di Marino

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Semifinale 1 – Venerdì 5 Maggio 2023

HUAWEI

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Lo stemma di famiglia

Arcsenio Lupin/3 è il rampollo di un'illustre famiglia di ladri matematici. Da piccolo, Arcsenio amava disegnare e colorare lo stemma di famiglia, che è a forma di pentagono. In quanti modi è possibile colorare i lati dello stemma, usando i colori giallo, blu e rosso, in modo che lati consecutivi abbiano colori diversi?

2. Area massima

Il primo ad unirsi alle avventure di Lupin/3 è stato Jig$\in\mathbb{N}$, abile pistolero e risolutore di quesiti. Ad esempio, intanto che ricaricava ha determinato quale fosse la massima area che può avere un triangolo con il lato più corto che misura 40 e con il lato più lungo che misura 101. Qual è?

3. Per scappare da Zenonigata

L'ispettore Zenonigata ha votato la propria carriera alla cattura di Lupin/3. Forse stavolta ce l'ha fatta: la zattera di Lupin/3 (un quadrato di lato ℓ) ha un lato incollato ad un lato della zattera di Zenonigata (un quadrato più grande, di lato 1100). L'unica possibilità per Lupin/3 di farla franca sarebbe quella di calcolare la lunghezza di ℓ, sapendo che la circonferenza circoscritta alla zattera di Zenonigata passa anche per i due vertici della zattera di Lupin/3 che non giacciono sull'altra zattera. Sfortunatamente per l'ispettore, Lupin/3 fugge. Quanto vale ℓ?

4. Cassette di sicurezza

Le cassette di sicurezza della banca che Lupin/3 sta rapinando sono disposte come una scacchiera 9×9 (messa in verticale) dalla quale sono state rimosse tutte le caselle strettamente sopra la diagonale che va da in alto a sinistra a in basso a destra. Lupin sa che ogni cassetta contiene un numero intero di milioni di dollari compreso tra 1 e 9, estremi inclusi; inoltre, ogni numero compare un numero diverso di volte ed in modo che ogni cassetta contenga un numero strettamente maggiore rispetto alla cassetta sottostante (se c'è una cassetta) e maggiore o uguale rispetto alla cassetta alla sua sinistra (se c'è). In quanti modi possono essere disposti i soldi?

5. Non scrivibilità

Goemetrikon è un abile samaterai che alterna la fidata katana alla risoluzione di quesiti matematici. L'ultimo che ha risolto è il seguente: siano a e b interi positivi tali che 2069 sia il più grande numero che non può essere scritto come somma di un multiplo (non negativo) di a e di un multiplo (non negativo) di b. Quanto vale, come minimo, ab? Dopo averlo visto all'opera, Lupin/3 lo vuole nella propria banda.

6. Sporcarsi le mani

Goemetrikon: «Mi unirò a voi se dimostrerete di non aver paura di sporcarvi le mani... nel fare i conti. Mi sapreste dire quanto vale $2023^3 - 3 \cdot 2022^3 + 3 \cdot 2021^3 - 2020^3$?».
Lupin/3: «Dammi un attimo... ». Qual è la risposta al quesito di Goemetrikon?

7. Lupin/3 si innamora

Lupin/3 è innamorato della bella FujItō, una ladra che lo ha ammaliato rispondendo quasi all'istante al seguente quesito: quanto vale la somma $\mathrm{mcm}(1,8) + \mathrm{mcm}(2,8) + \ldots + \mathrm{mcm}(136,8)$?

8. M'ama non m'ama

C'è chi sfoglia le margherite per sapere se il proprio amore è corrisposto, Lupin/3 preferisce invece affidarsi a questo gioco: estrae tre palline da un sacchetto contenente 9 palline numerate da 1 a 9. Ogni volta che estrae una pallina segna il numero e poi la reinserisce nel sacchetto. Se il massimo comun divisore (MCD) di questi 3 numeri è 1 allora la bella FujItō contraccambia il suo amore, altrimenti non è ricambiato. Qual è la probabilità che Lupin/3 sia corrisposto? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

9. Sei porte in sequenza

Lupin/3 e la sua banda vogliono rubare il prototipo di un nuovo computer quantistico. Devono superare in sequenza sei porte. Ogni porta ha come codice di accesso un numero intero compreso tra 0 e 18 estremi inclusi. Hanno scoperto che la somma dei codici di due porte consecutive è un numero che diviso per 19 dà resto 3. Questa proprietà vale per la prima e la seconda porta, per la seconda e la terza, e così via ma anche per la sesta e la prima porta. Quante sono le sequenze di sei codici che soddisfano queste condizioni?

10. Lavoro di squadra

Lupin/3 è riuscito a mettere le mani sullo scudo di Volpe Nera dove è incastonato il prezioso diamante Regina d'Africa. Lo scudo è un quadrato $ABCD$. Jig∈ℕ scalfisce i lati del quadrato, un proiettile per ogni lato: A' sul lato AB tale che $2AA' = A'B$ e, ciclicamente anche B' sul lato BC tale che $2BB' = B'C$, analogamente C' e D'. Goemetrikon esegue quattro tagli netti lungo DA', AB', BC' e CD' staccando così il diamante centrale dal resto dello scudo. Quanto vale il rapporto tra l'area del diamante e quella dello scudo iniziale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. La disciplina del samaterai [⋆]

Goemetrikon è diventato un samaterai grazie a disciplina ferrea e quesiti di geometria. Anni fa risolse questo: sia Γ una circonferenza di centro O, e sia r una retta tangente ad essa nel punto T. Siano A un punto appartenente a r distinto da T, e B e C le intersezioni della retta OA con Γ tali che $AB<AC$. Siano M un punto sul segmento OC e R l'intersezione della retta TM con Γ distinta da T. Infine, siano S un punto sull'arco di estremi TC non contenente B tale che $\widehat{MAT} = \widehat{RTS}$, F un punto sul segmento BS tale che $\widehat{ATS} + \widehat{BFT} = 180°$, e Q l'intersezione dei segmenti BC e RS. Sapendo che $\frac{QR}{RM} = \frac{8}{13}$, $BS = 33$ e $TF = 18$, determinare il rapporto delle aree dei triangoli BMF e BSQ. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

12. Malanni matematici [⋆]

Jig∈ℕ: «Hai letto che nelle città di MathVillain ed EstPonente quest'anno la sin(usite) è stata più forte del solito?».
Goemetrikon: «Sì. La percentuale di ammalati su tutta la popolazione a MathVillain è stata l'8%, mentre ad EstPonente è stata del 10%.».
Jig∈ℕ: «Inoltre, tra gli under 50 la percentuale di ammalati a MathVillain è stata doppia che ad EstPonente, ed anche nella fascia over 50 è stato riscontrato lo stesso rapporto.».
Goemetrikon: «Com'è possibile? Non c'è una contraddizione?».
Jig∈ℕ: «No. Sapendo che entrambe le città sono giovani, cioè gli under 50 sono almeno tanti quanti gli over 50, quanto è al minimo il rapporto tra gli under 50 mathvillani e il totale della popolazione di MathVillain?».
Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

13. Colpo al museo

Per progettare il colpo perfetto occorre conoscere perfettamente il luogo. Lupin/3, Jig∈ℕ e Goemetrikon studiano la mappa della stanza del museo da cui faranno sparire una famosa statua. La stanza è un triangolo ABC isoscele di base AB. Le tre porte della stanza si trovano in M, il punto medio di BC, in F, il piede dell'altezza relativa a B e in E, punto su AB tale che $EB \cong BM$. Sanno inoltre che per B, E, F, M passa una circonferenza. Per riuscire a eludere la videosorveglianza, è importante conoscere l'ampiezza degli angoli di ABC. Quanto vale $\widehat{ACB}$?

14. La Massima Comun Combinazione [⋆]

Goemetrikon: «Ecco la cassaforte! Il codice che la apre è il massimo comun divisore di tutti i numeri della forma $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + 999^n$ dove n è un intero positivo...».
Jig∈ℕ: «Accidenti, non abbiamo tempo di calcolare infiniti numeri!». Lupin/3 sogghigna. Qual è il codice?

15. Salto dell'ispettore

L'ispettore Zenonigata è convinto di riuscire a catturare tutti e tre i ladri. Egli si trova nel baricentro del triangolo GJL formato dai tre ladri. Goemetrikon e Jig∈ℕ distano 79 metri l'uno dall'altro, mentre Goemetrikon e Lupin/3 distano 119 metri. Goemetrikon salta come solo i samaterai sanno fare ed atterra nel simmetrico, rispetto a Zenonigata, del suo punto di partenza. Realizza che si trova (ancora) sulla circonferenza circoscritta a GJL; calcola la distanza tra Lupin e Jig∈ℕ e porta in salvo i suoi amici. Quanti metri misura la distanza tra Lupin e Jig∈ℕ?

16. Una cena per gioco

Sia Lupin/3 che FujItō amano scommettere. Ora giocano l'uno contro l'altra: se vince Lupin/3, usciranno a cena; se vince FujItō, lui dovrà regalarle l'enorme diamante che ha appena rubato. Hanno di fronte a loro 2023 fiammiferi. Inizialmente FujItō sceglie un intero positivo n. Lupin/3 nei suoi turni toglie un numero di fiammiferi fra 1 e n estremi compresi; invece, FujItō ad ogni turno toglie un numero di fiammiferi fra $n+1$ e $2n$ estremi compresi. Inizia a muovere Lupin/3. Chi all'inizio del proprio turno non può fare nessuna mossa ha perso. *Dare come risposta la somma dei valori di n che FujItō può scegliere per essere sicura di vincere.*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Lo stemma di famiglia	0030
2	Area massima	1980
3	Per scappare da Zenonigata	0220
4	Cassette di sicurezza	2880
5	Non scrivibilità	2162
6	Sporcarsi le mani	0006
7	Lupin/3 si innamora	9776
8	M'ama non m'ama	1366
9	Sei porte in sequenza	0019
10	Lavoro di squadra	0007
11	La disciplina del samaterai [⋆]	3457
12	Malanni matematici [⋆]	0009
13	Colpo al museo	0036
14	La Massima Comun Combinazione [⋆]	0900
15	Salto dell'ispettore	0101
16	Una cena per gioco	1225

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Semifinale 2 – Venerdì 5 Maggio 2023

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Colorare il bordo

Arcsenio Lupin/3 è il rampollo di un'illustre famiglia di ladri matematici. Da piccolo, Arcsenio amava disegnare e colorare lo stemma di famiglia, che è a forma di pentagono. In quanti modi è possibile colorare i lati dello stemma, usando i colori giallo, blu e rosso, in modo che lati consecutivi abbiano colori diversi?

2. Zattere quadrate

L'ispettore Zenonigata ha votato la propria carriera alla cattura di Lupin/3. Forse stavolta ce l'ha fatta: la zattera di Lupin/3 (un quadrato di lato ℓ) ha un lato incollato ad un lato della zattera di Zenonigata (un quadrato più grande, di lato 1200). L'unica possibilità per Lupin/3 di farla franca sarebbe quella di calcolare la lunghezza di ℓ, sapendo che la circonferenza circoscritta alla zattera di Zenonigata passa anche per i due vertici della zattera di Lupin/3 che non giacciono sull'altra zattera. Sfortunatamente per l'ispettore, Lupin/3 fugge. Quanto vale ℓ?

3. Triangoli areati

Il primo ad unirsi alle avventure di Lupin/3 è stato Jig$\in\mathbb{N}$, abile pistolero e risolutore di quesiti. Ad esempio, intanto che ricaricava ha determinato quale fosse la massima area che può avere un triangolo con il lato più corto che misura 38 e con il lato più lungo che misura 181. Qual è?

4. Un samaterai aritmetico

Goemetrikon è un abile samaterai che alterna la fidata katana alla risoluzione di quesiti matematici. L'ultimo che ha risolto è il seguente: siano a e b interi positivi tali che 2023 sia il più grande numero che non può essere scritto come somma di un multiplo (non negativo) di a e di un multiplo (non negativo) di b. Quanto vale, come minimo, ab? Dopo averlo visto all'opera, Lupin/3 lo vuole nella propria banda.

5. Nostalgia degli ultimi anni

Goemetrikon: «Mi unirò a voi se dimostrerete di non aver paura di sporcarvi le mani… nel fare i conti. Mi sapreste dire quanto vale $2023^3 - 3 \cdot 2022^3 + 3 \cdot 2021^3 - 2020^3$?».
Lupin/3: «Dammi un attimo…». Qual è la risposta al quesito di Goemetrikon?

6. Furto quantistico

Lupin/3 e la sua banda vogliono rubare il prototipo di un nuovo computer quantistico. Devono superare in sequenza sei porte. Ogni porta ha come codice di accesso un numero intero compreso tra 0 e 22 estremi inclusi. Hanno scoperto che la somma dei codici di due porte consecutive è un numero che diviso per 23 dà resto 3. Questa proprietà vale per la prima e la seconda porta, per la seconda e la terza, e così via ma anche per la sesta e la prima porta. Quante sono le sequenze di sei codici che soddisfano queste condizioni?

7. Un taglio di squadra

Lupin/3 è riuscito a mettere le mani sullo scudo di Volpe Nera dove è incastonato il prezioso diamante Regina d'Africa. Lo scudo è un quadrato $ABCD$. Jig$\in\mathbb{N}$ scalfisce i lati del quadrato, un proiettile per ogni lato: A' sul lato AB tale che $3AA' = A'B$ e, ciclicamente anche B' sul lato BC tale che $3BB' = B'C$, analogamente C' e D'. Goemetrikon esegue quattro tagli netti lungo DA', AB', BC' e CD' staccando così il diamante centrale dal resto dello scudo. Quanto vale il rapporto tra l'area del diamante e quella dello scudo iniziale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

8. Un calcolo ammaliante

Lupin/3 è innamorato della bella FujItō, una ladra che lo ha ammaliato rispondendo quasi all'istante al seguente quesito: quanto vale la somma $\mathrm{mcm}(1,8)+\mathrm{mcm}(2,8)+\ldots+\mathrm{mcm}(120,8)$?

9. M'ama non m'ama

C'è chi sfoglia le margherite per sapere se il proprio amore è corrisposto, Lupin/3 preferisce invece affidarsi a questo gioco: estrae tre palline da un sacchetto contenente 9 palline numerate da 1 a 9. Ogni volta che estrae una pallina segna il numero e poi la reinserisce nel sacchetto. Se il massimo comun divisore (MCD) di questi 3 numeri è 1 allora la bella FujItō contraccambia il suo amore, altrimenti non è ricambiato. Qual è la probabilità che Lupin/3 sia corrisposto? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

10. Il talento di Goemetrikon [$\star$]

Goemetrikon è diventato un samaterai grazie a disciplina ferrea e quesiti di geometria. Anni fa risolse questo: sia Γ una circonferenza di centro O, e sia r una retta tangente ad essa nel punto T. Siano A un punto appartenente a r distinto da T, e B e C le intersezioni della retta OA con Γ tali che $AB<AC$. Siano M un punto sul segmento OC e R l'intersezione della retta TM con Γ distinta da T. Infine, siano S un punto sull'arco di estremi TC non contenente B tale che $\widehat{MAT}=\widehat{RTS}$, F un punto sul segmento BS tale che $\widehat{ATS}+\widehat{BFT}=180°$, e Q l'intersezione dei segmenti BC e RS. Sapendo che $\frac{QR}{RM}=\frac{8}{13}$, $BS=33$ e $TF=18$, determinare il rapporto delle aree dei triangoli BMF e BSQ. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. I milioni ben disposti

Le cassette di sicurezza della banca che Lupin/3 sta rapinando sono disposte come una scacchiera 8×8 (messa in verticale) dalla quale sono state rimosse tutte le caselle strettamente sopra la diagonale che va da in alto a sinistra a in basso a destra. Lupin sa che ogni cassetta contiene un numero intero di milioni di dollari compreso tra 1 e 8, estremi inclusi; inoltre, ogni numero compare un numero diverso di volte ed in modo che ogni cassetta contenga un numero strettamente maggiore rispetto alla cassetta sottostante (se c'è una cassetta) e maggiore o uguale rispetto alla cassetta alla sua sinistra (se c'è). In quanti modi possono essere disposti i soldi?

12. Oltre il baricentro

L'ispettore Zenonigata è convinto di riuscire a catturare tutti e tre i ladri. Egli si trova nel baricentro del triangolo GJL formato dai tre ladri. Goemetrikon e Jig$\in\mathbb{N}$ distano 63 metri l'uno dall'altro, mentre Goemetrikon e Lupin/3 distano 153 metri. Goemetrikon salta come solo i samaterai sanno fare ed atterra nel simmetrico, rispetto a Zenonigata, del suo punto di partenza. Realizza che si trova (ancora) sulla circonferenza circoscritta a GJL; calcola la distanza tra Lupin e Jig$\in\mathbb{N}$ e porta in salvo i suoi amici. Quanti metri misura la distanza tra Lupin e Jig$\in\mathbb{N}$?

13. Gioco asimmetrico

Sia Lupin/3 che FujItō amano scommettere. Ora giocano l'uno contro l'altra: se vince Lupin/3, usciranno a cena; se vince FujItō, lui dovrà regalarle l'enorme diamante che ha appena rubato. Hanno di fronte a loro 2022 fiammiferi. Inizialmente FujItō sceglie un intero positivo n. Lupin/3 nei suoi turni toglie un numero di fiammiferi fra 1 e n estremi compresi; invece, FujItō ad ogni turno toglie un numero di fiammiferi fra $n+1$ e $2n$ estremi compresi. Inizia a muovere Lupin/3. Chi all'inizio del proprio turno non può fare nessuna mossa ha perso. *Dare come risposta la somma dei valori di n che FujItō può scegliere per essere sicura di vincere.*

14. Paradosso statistico [$\star$]

Jig$\in\mathbb{N}$: «Hai letto che nelle città di MathVillain ed EstPonente quest'anno la sin(usite) è stata più forte del solito?».
Goemetrikon: «Sì. La percentuale di ammalati su tutta la popolazione a MathVillain è stata il 7,5%, mentre ad EstPonente è stata del 10%.».
Jig$\in\mathbb{N}$: «Inoltre, tra gli under 50 la percentuale di ammalati a MathVillain è stata doppia che ad EstPonente, ed anche nella fascia over 50 è stato riscontrato lo stesso rapporto.».
Goemetrikon: «Com'è possibile? Non c'è una contraddizione?».
Jig$\in\mathbb{N}$: «No. Sapendo che entrambe le città sono giovani, cioè gli under 50 sono almeno tanti quanti gli over 50, quanto è al minimo il rapporto tra gli under 50 mathvillani e il totale della popolazione di MathVillain?».
Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

15. La stanza della statua

Per progettare il colpo perfetto occorre conoscere perfettamente il luogo. Lupin/3, Jig$\in\mathbb{N}$ e Goemetrikon studiano la mappa della stanza del museo da cui faranno sparire una famosa statua. La stanza è un triangolo ABC isoscele di base AB. Le tre porte della stanza si trovano in M, il punto medio di BC, in F, il piede dell'altezza relativa a B e in E, punto su AB tale che $EB\cong BM$. Sanno inoltre che per B,E,F,M passa una circonferenza. Per riuscire a eludere la videosorveglianza, è importante conoscere l'ampiezza degli angoli di ABC. Quanto vale $\widehat{CAB}$?

16. La combinazione divisiva [$\star$]

Goemetrikon: «Ecco la cassaforte! Il codice che la apre è il massimo comun divisore di tutti i numeri della forma $1^n+2^n+3^n+\cdots+9999^n$ dove n è un intero positivo...».
Jig$\in\mathbb{N}$: «Accidenti, non abbiamo tempo di calcolare infiniti numeri!». Lupin/3 sogghigna. Qual è il codice?

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Colorare il bordo	0030
2	Zattere quadrate	0240
3	Triangoli areati	3420
4	Un samaterai aritmetico	2115
5	Nostalgia degli ultimi anni	0006
6	Furto quantistico	0023
7	Un taglio di squadra	0026
8	Un calcolo ammaliante	8760
9	M'ama non m'ama	1366
10	Il talento di Goemetrikon [⋆]	3457
11	I milioni ben disposti	0320
12	Oltre il baricentro	0117
13	Gioco asimmetrico	0674
14	Paradosso statistico [⋆]	0029
15	La stanza della statua	0072
16	La combinazione divisiva [⋆]	3000

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 6 Maggio 2023

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Prima parte: il piano di Krull

1. 10 000 minions in fila
Krull è un supercattivo criminale, ma dall'animo buono... Oggi è agitato perché pensa che non è ancora riuscito a rubare la luna! Per rilassarsi gli piace pensare a problemi matematici. Scende allora nel suo laboratorio e prende 10 000 minions, suoi fidati aiutanti, numerati da 1 a 10 000. Poi decide di metterli in fila in modo tale che la più piccola delle 9 999 differenze in valore assoluto tra i numeri di due minions consecutivi sia più grande possibile. Quanto vale questa differenza?

2. Anche i cattivi lasciano la mancia
Krull è talmente cattivo che, per saltare la fila al caffé, congela tutti con il suo raggio congelante e poi prende la tazza di caffè in mano alla barista esterrefatta dalla scena. Quindi Krull se ne va via fischiettando, ma non prima di aver messo nel barattolo delle mance una moneta di forma circolare di raggio $\sqrt{3}\,cm$. Il barattolo è un prisma retto con base un esagono regolare E di lato $10\,cm$. Supponendo che la moneta sia caduta piatta sul fondo del barattolo, qual è la frazione di area di E su cui il centro della moneta può essere atterrato? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

3. Minion di Collatz
Il Dr. Nefarey sta sperimentando con dei minion un nuovo tipo di gas triplidimezzante. Se chiusi in una stanza piena di questo gas, succedono delle cose strane. Se i minions sono in numero pari, si dimezza il loro numero, ma se sono in numero dispari, si moltiplicano fino a raggiungere il triplo della popolazione iniziale, più uno. È un comportamento peculiare, visto che sembra che alla fine del processo rimanga sempre un minion solo!

Il Dr. Nefarey vuole capire da quali quantità di minions può partire per arrivare ad un certo punto ad avere esattamente 10 minions. Per esempio, se mette nella stanza 20 minions, il numero di minions diventa immediatamente 10. A questo punto il professore sta cercando di trovare i più piccoli 10 numeri iniziali di minions, maggiori di 10 e diversi da 20, che permettono di avere esattamente 10 minions. Qual'è la somma di questi 10 numeri?

4. Test della guardia
Dopo aver scoperto che qualcuno è riuscito a rubare la piramide di Cheope, Krull decide che è finalmente l'ora di rubare la luna! Per farlo però ha bisogno di un prestito dalla banca del crimine. Per testare le qualità di supercriminale, all'entrata della banca la guardia chiede: "Quanto vale la somma di tutti i quadrati perfetti, con almeno due cifre, tali che tutte le cifre tranne la prima da sinistra sono dei 4?". Cosa deve rispondere Krull per poter entrare e parlare con il direttore?

5. Come rubare una piramide
Nella sala d'attesa, Krull incontra Vector, colui che è riuscito a rubare la piramide. Incuriosito, gli chiede come ci è riuscito. Tronfio, Vector gli risponde: "Devi immaginarti due circonferenze Γ_1 e Γ_2 rispettivamente di raggi 7 e 41, tangenti esternamente nel punto P. Poi prendi r una retta tangente ad entrambe le circonferenze e sia Q il punto di tangenza di r con Γ_2 (che è diverso da P). Presa R l'intersezione distinta da P tra la retta PQ e Γ_1, considera poi s la retta tangente a Γ_1 in R. Ti sarebbe chiaro come ci sono riuscito se tu sapessi quanto è distante la retta s dal centro di Γ_2!". "Eeeeh? E come mi aiuterebbe a capirlo?". Rispondi con la distanza di s dal centro di Γ_2.

6. Stuzzichini di benvenuto
Krull prende in affido Maria, Gaetana e Agnese, affinché si possano infiltrare a casa di Vector. Le accoglie con alcuni

stuzzichini di benvenuto: 5 tranci di pizza, 4 sfilatini al formaggio e 3 involtini di zucchine. I quattro mangiano tutto e nessuno resta a digiuno. In quanti modi possono farlo, sapendo che gli stuzzichini non vengono divisi in parti più piccole?

7. Passatempo I: Gaetana e il suo triangolo murale

Maria, Gaetana e Agnese si stanno annoiando a casa di Krull e allora ognuna di loro pianta un chiodo nel muro, per divertirsi... I tre chiodi formano un triangolo ABC. Gaetana, che ama la geometria, prende un bel pennarello nero e disegna il baricentro G del triangolo sul muro, e successivamente anche H, il piede dell'altezza relativa ad A e K il piede della perpendicolare a BC condotta da G. Quanto vale il rapporto $\frac{GK}{AH}$? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

8. Passatempo II: Dove prende le palline Agnese?

Agnese trova due barattoli dove sono presenti delle biglie esplosive. Deve prendere N biglie per andare a giocare con le sorelle, e si accorge che se le prende tutte dal primo barattolo, poi nel secondo ci saranno 23 volte le biglie rimaste nel primo barattolo; se invece le prende tutte nel secondo barattolo, le biglie nel primo risulteranno 88 volte quelle rimaste nel secondo. Qual è il numero minimo di biglie che servono ad Agnese?

9. Passatempo III: Maria e gli scacchi

Maria è un'amante degli scacchi, e per passare il tempo decide di giocare al seguente solitario, sperando che duri molto... Posiziona quattro cavalli ai vertici di una scacchiera 3×3. Poi muove i cavalli come negli scacchi, da un vertice ad un altro di un sottorettangolo 2×3 della scacchiera. Inizialmente, $n = 0$. Ad ogni turno, Maria compie le seguenti operazioni:

- muove ognuno dei cavalli in una casella che può legalmente raggiungere, scelta a caso, indipendentemente, con probabilità uniforme: in questa operazione non è un problema se due o più cavalli si trovano nella stessa casella.
- incrementa n di 1.
- se più cavalli si trovano nella stessa casella, li rimuove tutti tranne uno.

Se al termine di un turno rimane un solo cavallo, il gioco termina. Quanto vale n, in media, quando il gioco finisce?

10. $10\,000$ minions da dividere

Krull deve dividere $10\,000$ minions in gruppi, affinché svolgano diverse mansioni. Per farlo, decide di usare questa procedura strampalata: innanzitutto li numera da 1 a $10\,000$. Poi ogni minion deve prendere il suo numero a, scriverlo in base 3 e cancellare le cifre 2. Poi, se sono presenti più di due cifre 1, deve eliminare tutte le cifre più a sinistra del secondo 1 a partire da destra; il numero binario che si ottiene è il numero della squadra (eventualmente 0) a cui verrà assegnato a quel minion. Ad esempio il minion $115 = \underline{11021}_3$ viene assegnato alla squadra $\underline{101}_2 = 5$. Quante squadre comporrà in questo modo Krull?

11. Rituale della buonanotte

Dal momento che Krull non legge la storia della buonanotte, Gaetana per addormentarsi scrive alla lavagna i quadrati dei numeri naturali n da 10 a 2023 (quindi scrive $100, 121, \ldots, 4\,092\,529$). Successivamente Agnese cancella le ultime tre cifre (unità, decine e centinaia) di ogni numero scritto. Quindi Maria rimbocca loro le coperte e osservando i numeri che restano, si chiede: quanti sono i numeri naturali compresi tra 1 e 4092 che *non* compaiono sulla lavagna?

Seconda parte: l'attuazione

12. Un dolce ingresso [$\star$]

Le tre bimbe si infiltreranno a casa di Vector con la scusa di vendere biscotti facendolo scegliere tra 82 tipi diversi. I minions si occupano di cucinarli: preparano teglie da 68 biscotti; una teglia del primo tipo, due del secondo tipo e così via, fino all'82-esimo tipo di biscotto di cui ne infornano 82 teglie. Le confezioni le ha procurate il Dr. Nefarey, che però ha capito male al telefono e le ha prese da 83 biscotti l'una. Sapendo che in ogni confezione vengono messi biscotti di un solo tipo, e che tutti i biscotti cucinati vengono confezionati, qual è il numero minimo di confezioni che i minions dovranno usare?

13. La casa quadratica di Vector [$\star\star$]

La casa di Vector è costruita attorno alla piscina dove vive il suo squalo: essa è un triangolo ABC con $AB = 20m$, $AC = 23m$ e $BC = 29m$. Sul lato BC viene costruito il quadrato BCC_1B_2, nella stessa parte di piano in cui si trova il triangolo. Analogamente vengono costruiti CAA_1C_2 e ABB_1A_2. I lati di questi tre quadrati costituiscono le mura della casa. I condotti per l'aria condizionata sono B_1B_2 e C_1C_2; essi intersecano A_1A_2, rispettivamente, in P e Q. La retta per P perpendicolare ad AB e la retta per Q perpendicolare ad AC si incontrano in X, la presa d'aria centrale, da cui Krull dovrà scendere senza farsi vedere da Vector. il corridoio AX, che passa sopra la piscina interseca la circonferenza circoscritta ad ABC nuovamente in Y (che è finalmente l'uscita!). Determinare $AX \cdot XY$ in m^2. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

14. Tiro al bersaglio

Per festeggiare il successo della missione Krull e le tre bimbe si recano al Luna Park. Lo stand del tiro al bersaglio è stato costruito per minimizzare l'area da poter colpire. Il tabellone è formato da una serie di quadrati affiancati; la somma delle lunghezze dei loro lati è $2023\,mm$ e ciascuno ha come lato un numero intero di mm. Inoltre i quadrati sono tutti di dimensioni diverse. Qual è la minima area totale del tabellone in mm^2?

15. Un minion davvero mignon

Kelvin sta portando il raggio restringente nel locale di sicurezza, che è una stanza con le pareti a specchio. La planimetria della stanza è un quadrilatero $ABCD$ tale che $\widehat{ABC} = 90°$, $\widehat{CDA} = 90°$, $\widehat{BCD} = 36°$, $BC = 2{,}8m$ e $BD = 1{,}8m$. Kelvin è nel vertice A e giocando con il raggio restringente accidentalmente spara puntando sul lato BC, parallelamente al pavimento e il raggio, dopo aver colpito una volta la parete BC e una volta la parete CD, torna di nuovo sul punto A, chiudendo un percorso triangolare e restringendo lo sprovveduto Kelvin. Qual è la lunghezza complessiva percorsa dal raggio, in cm?

16. La cerimonia del tè

L'esercito dei minions sta costruendo il razzo che permetterà a Krull di rubare la luna. Nel frattempo i minion Stewart, Kelvin e Bob tengono impegnate le tre bimbe.

Maria, Gaetana e Agnese si apprestano a giocare alla cerimonia del tè. Si trovano sui vertici di un triangolo di lati $AB = 165\,cm$, $BC = 220\,cm$ e $AC = 275\,cm$. I minion Stewart e Kelvin si trovano rispettivamente in S, il piede della bisettrice uscente da A e in K, il piede dell'altezza relativa a B. Arriva un po' in ritardo Bob, che si siede sul piede dell'altezza relativa ad S del triangolo ACS; finalmente tutti possono iniziare a sorseggiare il tè! Quanto distano in cm Bob e Kelvin?

17. Traiettoria per l'allunaggio [$\star$]

Il Dr. Nefarey sa che la *complessità binaria* $c(n)$ di un numero naturale n è il minimo numero di potenze di 2 necessario per scrivere n come somma o differenza di potenze di 2. Ad esempio $c(4) = 1$ poiché $4 = 2^2$, $c(15) = 2$ poiché $15 = 2^4 - 2^0$ e $c(23) = 3$ infatti $23 = 2^4 + 2^3 - 2^0$. Per settare la traiettoria in modo che il razzo raggiunga la luna deve calcolare $c(1) + c(2) + c(3) + \ldots + c(2047) + c(2048)$. Che valore ottiene?

18. Poltrone numerate in modo bislacco

Lo spettacolo di danza di Maria, Gaetana e Agnese si svolge in un teatro la cui platea è costituita da 2022 file da 2023 poltrone ciascuna. La numerazione è particolare e ripetitiva: nella prima fila i numeri sono, in sequenza, la prima e la 2022-esima riga del triangolo di Tartaglia (in quest'ordine), nella seconda fila i numeri sono, sempre in sequenza e in quest'ordine, la seconda e la 2021-esima riga del triangolo di Tartaglia, e così via. Quindi, per ogni j intero tra 1 e 2022, nella j-esima fila le poltrone sono state numerate con la j-esima riga e la $(2023 - j)$-esima riga del triangolo di Tartaglia. Inoltre, poltrone che sono collocate in posizione pari di una fila pari sono arancioni, mentre poltrone in posizione dispari di una fila dispari sono blu, e le restanti gialle. Quanto vale la differenza tra la somma dei numeri assegnati alle poltrone blu e la somma dei numeri assegnati alle poltrone arancioni?

19. Codice di rientro [$\star\star$]

Dopo aver recuperato la luna, Krull si accorge che potrebbe essere ancora in tempo per il balletto di Maria, Gaetana e Agnese. Allora cerca di immettere subito il codice di rientro $p(10)$, dove $p(x)$ è il polinomio $(x-1)^9$. Tuttavia nella fretta si confonde e considera invece $f(x)$, la funzione ottenuta copiando l'espressione di $p(x)$ e sostituendo ogni termine del tipo $a_n x^n$ con $a_n n^x$. Quanto vale $f(10)$, il numero veramente inserito da Krull?
Si diano le ***prime*** *4 cifre del risultato.*

20. Il riscatto

Krull è arrivato troppo tardi: il balletto è finito e Vector ha rapito le tre bimbe. Ha lasciato però un biglietto in cui definisce $Q(n)$ come la somma dei numeri naturali minori o uguali ad n che non hanno fattori primi in comune con n (ad esempio $Q(1) = 1$, $Q(5) = 1+2+3+4$ e $Q(15) = 1+2+4+7+8+11+13+14$). Krull per riscattare le tre bimbe deve rispondere alla domanda lasciata da Vector in fondo al biglietto: quanti sono i numeri interi n compresi tra 1 e 100 tali che $Q(n)$ sia un multiplo di n?

21. Festeggiamenti algebrici

Krull riesce a salvare le bimbe e rispedire la luna (insieme a Vector) in cielo. È tempo di festeggiare!! Quale modo migliore se non risolvendo un bel problema di algebra? Se $p(x) = x^3 - 23x^2 + ax - b^2$ è un polinomio con 3 radici intere (non necessariamente distinte) tale che a, b sono due numeri naturali, quali valori può assumere b? *Dare come risposta la somma di tutti i valori possibili.*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	10 000 minions in fila	5000
2	Anche i cattivi lasciano la mancia	0041
3	Minion di Collatz	0164
4	Test della guardia	1652
5	Come rubare una piramide	0027
6	Stuzzichini di benvenuto	7316
7	Passatempo I: Gaetana e il suo triangolo murale	0004
8	Passatempo II: Dove prende le palline Agnese?	2023
9	Passatempo III: Maria e gli scacchi	0010
10	10 000 minions da dividere	0046
11	Rituale della buonanotte	2319
12	Un dolce ingresso [⋆]	2829
13	La casa quadratica di Vector [⋆⋆]	0593
14	Tiro al bersaglio	6191
15	Un minion davvero mignon	0360
16	La cerimonia del tè	0066
17	Traiettoria per l'allunaggio [⋆]	8420
18	Poltrone numerate in modo bislacco	0001
19	Codice di rientro [⋆⋆]	1632
20	Il riscatto	0099
21	Festeggiamenti algebrici	0081

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Gara del pubblico – Sabato 6 Maggio 2023

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **60 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Il buongiorno si vede dal mattino

Krull, Lucy Wiles e le loro tre figlie Maria, Gaetana ed Agnese si ritrovano ogni mattina per fare colazione insieme. Di solito, ciascuno di loro mangia esattamente un cibo a scelta tra dei *biscotti*, un *panino* oppure una *mela* e beve esattamente una bevanda a scelta tra *latte*, *te* e *caffè*. Purtroppo, Krull e Lucy devono sempre stare attenti alle esigenze di tutti, infatti:

- la piccola Agnese è intollerante al lattosio e non può bere il *latte*;
- Maria non ha mai voglia di mangiare una *mela*;
- Gaetana non vuole bere il *latte* se non è accompagnato dai *biscotti*.

Inoltre, Krull e Lucy decidono di lasciare mangiare sempre i *biscotti* ai loro figli perché ce ne sono pochi e lasciano bere il *caffè* soltanto a Maria, oltre che a loro stessi. In quanti modi diversi può essere consumata la colazione?

2. Il sole del deserto

Krull incontra Vector, colui che è riuscito a rubare la piramide. Incuriosito, gli chiede come abbia fatto. Tronfio, Vector gli risponde: «Devi immaginarti due circonferenze Γ_1 e Γ_2 rispettivamente di raggi 8 e 52, tangenti esternamente nel punto P. Poi prendi r una retta tangente ad entrambe le circonferenze e sia Q il punto di tangenza di r con Γ_2 (che è diverso da P). Presa R l'intersezione distinta da P tra la retta PQ e Γ_1, considera poi s la retta tangente a Γ_1 in R. Ti sarebbe chiaro come ci sono riuscito se tu sapessi quanto è distante la retta s dal centro di Γ_2!». «Eeeeh? E come mi aiuterebbe a capirlo?». Rispondere con la distanza di s dal centro di Γ_2.

3. Noooo la piramide

Krull arrivò nel luogo dove la piramide era stata rubata. Sul triste terreno era incisa la seguente espressione:

$$\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{7^2-4}+\frac{1}{11^2-4}+\cdots+\frac{1}{95^2-4}+\frac{1}{99^2-4}$$

Quanto valeva? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

4. Segui le stelle

Krull sconsolato guardò il cielo e si ricordò di una celebre frase «Se tu segui tua stella non puoi fallire a glorioso porto». Ciò gli diede l'ispirazione per trovare tutti i polinomi f a coefficienti reali tali che

$$f(x^2) = f(2x-1) + (f(x))^2.$$

Quanto vale la somma dei possibili valori di $f(2023)$?

5. Trucchi gialli segreti

Krull chiede aiuto al Dr. Nefarey per rubare la luna. Il Dr. Nefarey sa che il trucco è conoscere il numero N con la seguente proprietà. Se lanciando dadi a 6 facce si vuole ottenere una somma pari a N, allora occorre lanciarne almeno k. Il trucco funziona solo se, lanciando esattamente k dadi, la probabilità di ottenere N è la stessa di ottenere 337. Sapendo che $N > 337$, quali sono i possibili valori del trucco del Dr. Nefarey? *Fornire come risposta la somma del più grande e del più piccolo N.*

6. Burle infantili

Kelvin e Stewart giocano tra di loro facendo molto baccano quando arriva Bob e dice loro "Smettetela di oziare, determinate invece i valori dell'intero positivo n tali che

$$8n^3+11n^2+16n-20$$

è un cubo perfetto." Quanto vale la somma dei valori ottenuti da Kelvin e Stewart?

7. SOS

Krull: «Dr. Nefarey, ho bisogno di aiuto. Sia $M=\{1,2,...,2040\}$ e per ogni intero compreso tra 1 e 2040 sia $a(n)$ il numero di sottoinsiemi di M con al più n elementi e con un numero pari di elementi, e sia $b(n)$ il numero di sottoinsiemi di M con al più n elementi e con un numero dispari di elementi. Qual è il massimo esponente k tale che 2^k divide il massimo di $|a(n)-b(n)|$ al variare di n?»
Dr. Nefarey: «Eh?»

8. Giochi pericolosi

Kelvin sta portando il raggio restringente nel locale di sicurezza, che è una stanza con le pareti a specchio. La planimetria della stanza è un quadrilatero $ABCD$ tale che $\widehat{ABC}=90°$, $\widehat{CDA}=90°$, $\widehat{BCD}=54°$, $BC=3,56m$ e $BD=3,24m$. Kelvin è nel vertice A e giocando con il raggio restringente accidentalmente spara puntando sul lato BC, parallelamente al pavimento e il raggio, dopo aver colpito una volta la parete BC e una volta la parete CD, torna di nuovo sul punto A, chiudendo un percorso triangolare e restringendo lo sprovveduto Kelvin. Qual è la lunghezza complessiva percorsa dal raggio, in cm?

9. Quesito molesto [⋆]

Krull: «Niente, niente, niente quesiti molesti. Chiaro?»
Agnese: «Questo vale come molesto? Sia x_n una successione tale che $x_0=1$ e $x_{n+1}=x_n^3+3x_n^2+2x_n$. Determinare il resto della divisione per 2023 di

$$\sum_{k=0}^{2024} 2^{2^{x_k}}.$$

Krull: «Molto».
Qual è la risposta al quesito di Agnese?

10. Triangoli gialli [⋆]

Maria disegna un triangolo equilatero ABC di lato 100 e Gaetana traccia una retta che interseca i lati AB e BC in P e Q rispettivamente, con $\overline{AP}=25$. In questo modo, il triangolo ABC viene tagliato in due parti aventi la stessa area. Agnese vuole tracciare una seconda retta RS, con R in AB e S in AC, in modo che ABC risulti diviso in 4 poligoni aventi la stessa area. Quanto deve valere $\overline{AS}$?

11. Il quesito di Agnese [⋆⋆]

Agnese: «Krull, un quesito per te!»
Krull: «Oh, no, ancora!»
Agnese: «Consideriamo le coppie (a,b) di interi positivi coprimi, con $a \leq b < 500$, tali che $a \mid b^2+5$ e $b \mid a^2+5$. Sia n il numero di tali coppie e B il massimo numero che compare in una di queste coppie. Quanto vale $n+B$?»

12. Il balletto [⋆⋆]

Dopo aver recuperato la luna, Krull si accorge che potrebbe essere ancora in tempo per il balletto di Maria, Gaetana e Agnese. Allora cerca di immettere subito il codice di rientro $p(10)$, dove $p(x)$ è il polinomio $(x-1)^9$. Tuttavia nella fretta si confonde e considera invece $f(x)$, la funzione ottenuta copiando l'espressione di $p(x)$ e sostituendo ogni termine del tipo $a_n x^n$ con $a_n n^x$. Quanto vale $f(11)$, il numero veramente inserito da Krull? *Rispondere con le prime 4 cifre del risultato.*

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Il buongiorno si vede dal mattino	2592
2	Il sole del deserto	0036
3	Noooo la piramide	0126
4	Segui le stelle	2022
5	Trucchi gialli segreti	4009
6	Burle infantili	0010
7	SOS	0007
8	Giochi pericolosi	0648
9	Quesito molesto [⋆]	1756
10	Triangoli gialli [⋆]	0053
11	Il quesito di Agnese [⋆⋆]	0340
12	Il balletto [⋆⋆]	4191