



Unione
Matematica
Italiana



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 5 Maggio 2023



- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Colorare il bordo

Arcsenio Lupin/3 è il rampollo di un'illustre famiglia di ladri matematici. Da piccolo, Arcsenio amava disegnare e colorare lo stemma di famiglia, che è a forma di pentagono. In quanti modi è possibile colorare i lati dello stemma, usando i colori giallo, blu e rosso, in modo che lati consecutivi abbiano colori diversi?

2. Zattere quadrate

L'ispettore Zenonigata ha votato la propria carriera alla cattura di Lupin/3. Forse stavolta ce l'ha fatta: la zattera di Lupin/3 (un quadrato di lato ℓ) ha un lato incollato ad un lato della zattera di Zenonigata (un quadrato più grande, di lato 1200). L'unica possibilità per Lupin/3 di farla franca sarebbe quella di calcolare la lunghezza di ℓ , sapendo che la circonferenza circoscritta alla zattera di Zenonigata passa anche per i due vertici della zattera di Lupin/3 che non giacciono sull'altra zattera. Sfortunatamente per l'ispettore, Lupin/3 fugge. Quanto vale ℓ ?

3. Triangoli areati

Il primo ad unirsi alle avventure di Lupin/3 è stato Jig $\in\mathbb{N}$, abile pistolero e risolutore di quesiti. Ad esempio, intanto che ricaricava ha determinato quale fosse la massima area che può avere un triangolo con il lato più corto che misura 38 e con il lato più lungo che misura 181. Qual è?

4. Un samaterai aritmetico

Goemetrikon è un abile samaterai che alterna la fidata katana alla risoluzione di quesiti matematici. L'ultimo che ha risolto è il seguente: siano a e b interi positivi tali che 2023 sia il più grande numero che non può essere scritto come somma di un multiplo (non negativo) di a e di un multiplo (non negativo) di b . Quanto vale, come minimo, ab ? Dopo averlo visto all'opera, Lupin/3 lo vuole nella propria banda.

5. Nostalgia degli ultimi anni

Goemetrikon: «Mi unirò a voi se dimostrerete di non aver paura di sporcarvi le mani... nel fare i conti. Mi sapreste dire quanto vale $2023^3 - 3 \cdot 2022^3 + 3 \cdot 2021^3 - 2020^3$?».

Lupin/3: «Dammi un attimo...». Qual è la risposta al quesito di Goemetrikon?

6. Furto quantistico

Lupin/3 e la sua banda vogliono rubare il prototipo di un nuovo computer quantistico. Devono superare in sequenza sei porte. Ogni porta ha come codice di accesso un numero intero compreso tra 0 e 22 estremi inclusi. Hanno scoperto che la somma dei codici di due porte consecutive è un numero che diviso per 23 dà resto 3. Questa proprietà vale per la prima e la seconda porta, per la seconda e la terza, e così via ma anche per la sesta e la prima porta. Quante sono le sequenze di sei codici che soddisfano queste condizioni?

7. Un taglio di squadra

Lupin/3 è riuscito a mettere le mani sullo scudo di Volpe Nera dove è incastonato il prezioso diamante Regina d'Africa. Lo scudo è un quadrato $ABCD$. Jig $\in\mathbb{N}$ scalfisce i lati del quadrato, un proiettile per ogni lato: A' sul lato AB tale che $3AA' = A'B$ e, ciclicamente anche B' sul lato BC tale che $3BB' = B'C$, analogamente C' e D' . Goemetrikon esegue quattro tagli netti lungo DA' , AB' , BC' e CD' staccando così il diamante centrale dal resto dello scudo. Quanto vale il rapporto tra l'area del diamante e quella dello scudo iniziale? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

8. Un calcolo ammaliante

Lupin/3 è innamorato della bella FujItō, una ladra che lo ha ammaliato rispondendo quasi all'istante al seguente

quesito: quanto vale la somma $\text{mcm}(1,8) + \text{mcm}(2,8) + \dots + \text{mcm}(120,8)$?

9. M'ama non m'ama

C'è chi sfoglia le margherite per sapere se il proprio amore è corrisposto, Lupin/3 preferisce invece affidarsi a questo gioco: estrae tre palline da un sacchetto contenente 9 palline numerate da 1 a 9. Ogni volta che estrae una pallina segna il numero e poi la reinsertisce nel sacchetto. Se il massimo comun divisore (MCD) di questi 3 numeri è 1 allora la bella FujItō contraccambia il suo amore, altrimenti non è ricambiato. Qual è la probabilità che Lupin/3 sia corrisposto? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

10. Il talento di Goemetrikon [★]

Goemetrikon è diventato un samaterai grazie a disciplina ferrea e quesiti di geometria. Anni fa risolse questo: sia Γ una circonferenza di centro O , e sia r una retta tangente ad essa nel punto T . Siano A un punto appartenente a r distinto da T , e B e C le intersezioni della retta OA con Γ tali che $AB < AC$. Siano M un punto sul segmento OC e R l'intersezione della retta TM con Γ distinta da T . Infine, siano S un punto sull'arco di estremi TC non contenente B tale che $\widehat{MAT} = \widehat{RTS}$, F un punto sul segmento BS tale che $\widehat{ATS} + \widehat{BFT} = 180^\circ$, e Q l'intersezione dei segmenti BC e RS . Sapendo che $\frac{QR}{RM} = \frac{8}{13}$, $BS = 33$ e $TF = 18$, determinare il rapporto delle aree dei triangoli BMF e BSQ . *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. I milioni ben disposti

Le cassette di sicurezza della banca che Lupin/3 sta rapinando sono disposte come una scacchiera 8×8 (messa in verticale) dalla quale sono state rimosse tutte le caselle strettamente sopra la diagonale che va da in alto a sinistra a in basso a destra. Lupin sa che ogni cassetta contiene un numero intero di milioni di dollari compreso tra 1 e 8, estremi inclusi; inoltre, ogni numero compare un numero diverso di volte ed in modo che ogni cassetta contenga un numero strettamente maggiore rispetto alla cassetta sottostante (se c'è una cassetta) e maggiore o uguale rispetto alla cassetta alla sua sinistra (se c'è). In quanti modi possono essere disposti i soldi?

12. Oltre il baricentro

L'ispettore Zenonigata è convinto di riuscire a catturare tutti e tre i ladri. Egli si trova nel baricentro del triangolo GJL formato dai tre ladri. Goemetrikon e $Jig \in \mathbb{N}$ distano 63 metri l'uno dall'altro, mentre Goemetrikon e Lupin/3 distano 153 metri. Goemetrikon salta come solo i samaterai sanno fare ed atterra nel simmetrico, rispetto a Zenonigata, del suo punto di partenza. Realizza che si trova (ancora) sulla circonferenza circoscritta a GJL ; calcola la distanza tra Lupin e $Jig \in \mathbb{N}$ e porta in salvo i suoi amici. Quanti metri misura la distanza tra Lupin e $Jig \in \mathbb{N}$?

13. Gioco asimmetrico

Sia Lupin/3 che FujItō amano scommettere. Ora giocano l'uno contro l'altra: se vince Lupin/3, usciranno a cena; se vince FujItō, lui dovrà regalarle l'enorme diamante che ha appena rubato. Hanno di fronte a loro 2022 fiammiferi. Inizialmente FujItō sceglie un intero positivo n . Lupin/3 nei suoi turni toglie un numero di fiammiferi fra 1 e n estremi compresi; invece, FujItō ad ogni turno toglie un numero di fiammiferi fra $n+1$ e $2n$ estremi compresi. Inizia a muovere Lupin/3. Chi all'inizio del proprio turno non può fare nessuna mossa ha perso. *Dare come risposta la somma dei valori di n che FujItō può scegliere per essere sicura di vincere.*

14. Paradosso statistico [★]

$Jig \in \mathbb{N}$: «Hai letto che nelle città di MathVillain ed EstPonente quest'anno la sin(usite) è stata più forte del solito?».

Goemetrikon: «Sì. La percentuale di ammalati su tutta la popolazione a MathVillain è stata il 7,5%, mentre ad EstPonente è stata del 10%.».

$Jig \in \mathbb{N}$: «Inoltre, tra gli under 50 la percentuale di ammalati a MathVillain è stata doppia che ad EstPonente, ed anche nella fascia over 50 è stato riscontrato lo stesso rapporto.».

Goemetrikon: «Com'è possibile? Non c'è una contraddizione?».

$Jig \in \mathbb{N}$: «No. Sapendo che entrambe le città sono giovani, cioè gli under 50 sono almeno tanti quanti gli over 50, quanto è al minimo il rapporto tra gli under 50 mathvillaini e il totale della popolazione di MathVillain?».

Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

15. La stanza della statua

Per progettare il colpo perfetto occorre conoscere perfettamente il luogo. Lupin/3, $Jig \in \mathbb{N}$ e Goemetrikon studiano la mappa della stanza del museo da cui faranno sparire una famosa statua. La stanza è un triangolo ABC isoscele di base AB . Le tre porte della stanza si trovano in M , il punto medio di BC , in F , il piede dell'altezza relativa a B e in E , punto su AB tale che $EB \cong BM$. Sanno inoltre che per B, E, F, M passa una circonferenza. Per riuscire a eludere la videosorveglianza, è importante conoscere l'ampiezza degli angoli di ABC . Quanto vale \widehat{CAB} ?

16. La combinazione divisiva [★]

Goemetrikon: «Ecco la cassaforte! Il codice che la apre è il massimo comun divisore di tutti i numeri della forma $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 9999^n$ dove n è un intero positivo...».

$Jig \in \mathbb{N}$: «Accidenti, non abbiamo tempo di calcolare infiniti numeri!». Lupin/3 sogghigna. Qual è il codice?



Unione
Matematica
Italiana



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

XXIV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 5 Maggio 2023



Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Colorare il bordo	0030
2	Zattere quadrate	0240
3	Triangoli areati	3420
4	Un samaterai aritmetico	2115
5	Nostalgia degli ultimi anni	0006
6	Furto quantistico	0023
7	Un taglio di squadra	0026
8	Un calcolo ammaliante	8760
9	M'ama non m'ama	1366
10	Il talento di Goemetrikon [★]	3457
11	I milioni ben disposti	0320
12	Oltre il baricentro	0117
13	Gioco asimmetrico	0674
14	Paradosso statistico [★]	0029
15	La stanza della statua	0072
16	La combinazione divisiva [★]	3000