Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

da un'idea di

Alessandro Manzoni

con suggerimenti da parte del Trio

17 gennaio 2020

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi([1])

1. *QUEL RAMO DEL LAGO* ______ Silvia Sconza

A.M. Quel ramo del lago di Como che volge a mezzogiorno (*e, quando suona mezzogiorno, il carillon di Don Abbondio si accende e in una finestrella compare un numero a caso compreso tra* 1 *e* 15000*. Premendo un pulsante il numero nella finestrella viene modificato come segue:*

- *se il numero indicato non è primo, diventa il massimo tra i divisori dispari del numero indicato e minori di esso;*
- *se il numero indicato è* 1 *o è primo, il numero sparisce e il carillon suona.*)

Perpetua (*Poco prima di mezzogiorno*) Senza sapere che numero comparirà, quante volte al massimo devo prevedere di dover premere il pulsante per fare suonare il carillon?

2. *IMBROGLI* ______ Andrea Giusto

Don Abbondio Oggi, oggi... abbiate pazienza, ma oggi non posso.
Renzo Oggi non può! Cos'è nato?
Don Abbondio C'è degli imbrogli: Quanti sono i polinomi $P(x)$ con coefficienti 0 o 1 e tali che $P(2) \leq 2020$?
Renzo Ma di che grado?
Don Abbondio Che domanda da Carneade! Ma grado qualunque, da uno in su!

3. *NON SONO UN ROBOT* ______ Sandro Campigotto

Fra Cristoforo è davanti al castello di Don Rodrigo. Su un cartello si legge: Vietato l'ingresso ai robot e ai lombardi.
Fra Cristoforo Fatemi entrare.
Tira-dritto Frate, non sai leggere.
Fra Cristoforo Certo! Io vengo da ***; non sono lombardo.
Tira-dritto Per entrare devi dimostrare di non essere un robot: rispondi alla domanda seguente. Quanto vale la somma di tutti i possibili numeri b interi positivi per cui esiste un intero positivo a tale che $\sqrt{ab+b!} = 100$?

4. *LA RIPARAZIONE* ______ Sandro Campigotto

Tonio Non posso venire ora: devo riparare le due finestre. Mi ci vogliono 4 ore.
Renzo Beh, sei rapido. Da solo io ci impiegherei 5 ore.
Tonio Aiutami! (*Insieme a Renzo, lavora alla riparazione delle due finestre*)
Renzo (*Passate due ore*) Devo andare. Ma ormai è finito. Raggiungimi subito appena finisci.
A.M. Quanti minuti servono a Tonio per terminare il lavoro?

5. *CONSOLAZIONE* ______ Matteo Bobbio

Agnese (*Consolando Lucia*) Non c'è nulla di cui preoccuparsi; ci vuole solo pazienza. Fai come fanno i matematici: scrivi sulla lavagnetta alcuni numeri e calcolane la somma.
Lucia (*Scrive* $15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1$) Me sventurata: la somma fa 120, ma il mio numero preferito è 88. Adesso cambio il maggior numero possibile di segni $+$ in segni $-$ in modo che l'espressione ottenuta dia come risultato proprio 88.
[*Dare come risposta il prodotto in valore assoluto dei termini a cui è stato cambiato il segno.*]

6. *LA SCOPERTA DEI BRAVI* ______ Andrea Giusto

Griso (*Rivolto a Sfregiato e Tira-dritto*) Ieri sera, come passatempo, ho scoperto l'operazione $*$. (*Sfregiato e Tira-dritto si guardano in cagnesco*) Beh, non ci crederete, ma è commutativa! (*Sfregiato e Tira-dritto mettono mano ai coltelli*) Inoltre so che $0 * 0 = 1$ e $n * (m+1) = m(n*m) + (n*m)$ per ogni coppia di numeri naturali n e m. Chi di voi sa dirmi quanti sono gli zeri con cui termina il numero $2020 * 2019$? (*Sfregiato e Tira-dritto lasciano cadare i coltelli e si mettono a fare i conti.*)

([1]) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

7. *NEL CASTELLO* ______ Giulia Gaggero

Nel castello di Don Rodrigo, conte di Fuentes, Mendoza, Deferia, duca di Terranova, contestabile di Castiglia, ci sono servi, che dicono sempre la verità, e bravi, che dicono sempre il falso. Nel cortile ci sono venti impiegati al servizio di Don Rodrigo.

Primo impiegato Tutti i presenti mentono.
Secondo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me.
Terzo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e un altro.
Quarto impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri due.
Quinto impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri tre.
Sesto impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri quattro.
Settimo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri cinque.
Ottavo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri sei.
Nono impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri sette.
Decimo impiegato Tutti i presenti mentono tranne me e altri otto.
Undicesimo impiegato Esattamente uno dei presenti dice la verità.
Dodicesimo impiegato Esattamente due dei presenti dicono la verità.
Tredicesimo impiegato Esattamente tre dei presenti dicono la verità.
Quattordicesimo impiegato Esattamente quattro dei presenti dicono la verità.
Quindicesimo impiegato Esattamente cinque dei presenti dicono la verità.
Sedicesimo impiegato Esattamente sei dei presenti dicono la verità.
Diciassettesimo impiegato Esattamente sette dei presenti dicono la verità.
Diciottesimo impiegato Esattamente otto dei presenti dicono la verità.
Diciannovesimo impiegato Esattamente nove dei presenti dicono la verità.
Ventesimo impiegato Esattamente dieci dei presenti dicono la verità.
A.M. Qual è il numero massimo di bravi compatibile con tutte le affermazioni? E qual è il numero minimo?
[*Dare come risposta la somma dei due numeri.*]

8. *IL SOFFITTO* ______ Luca Renzi

Tonio La cappella ha venti pareti: è un icosagono. La decorazione che ho fatto per il soffitto consiste di travi sottili a tracciare le 170 diagonali.
Renzo Quanti sono i triangoli che hanno come lati tre travi intere?

9. *IN CAMMINO* ______ Sandro Campigotto

Fra Cristoforo (*Cammina pensoso*) Quanto vale la somma $3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{100 \text{ cifre}}$?
[*Dare come risposta le somma delle cifre del risultato.*]

10. *NEL 1830* ______ Luca Renzi

A.M. La somma delle cifre in 1830 è 12; la somma delle cifre in 12 è 3, che è esattamente il numero delle cifre diverse da 0 in 1830.
Renzo Quanti sono i numeri di quattro cifre che condividono questa proprietà?
Lucia Lorenzo o, come dicevan tutti, Renzo, vuoi dire: quanti sono quei numeri interi compresi tra 999 e 9999 tali che la cifra che si ottiene sommando le loro cifre ed, eventualmente, ripetendo tale operazione se non si ottiene subito una cifra, sia esattamente il numero di cifre diverse da 0 che compaiono nel numero dato? (*Renzo annuisce.*)

11. *A PESCARENICO* ______ Silvia Sconza

Lucia A Pescarenico ci sono 3420 persone: alcune sono bugiarde, e dicono sempre il falso; le altre dicono sempre la verità. Lorenzo o, come dicevan tutti, Renzo, è troppo pericoloso; dobbiamo scappare.
Renzo Fermiamo questi quattro abitanti di Pescarenico. (*Rivolto a quattro abitanti di Pescarenico.*) Quanti sono gli abitanti bugiardi di Pescarenico?
Primo abitante Ci sono un numero pari di bugiardi.
Secondo abitante Ci sono un numero divisibile per 3 di bugiardi.
Terzo abitante Ci sono un numero divisibile per 5 di bugiardi.
Quarto abitante Ci sono tanti sinceri quanti bugiardi.
Fra Cristoforo Vi assicuro che tra questi quattro c'è almeno un bugiardo.
Lucia In questo caso, quanti sono al massimo i bugiardi a Pescarenico?

12. *A MMMMMONZA* ——— Giuseppe Rosolini

Gertrude Lucia, questa è la tua stanza (*Apre la porta, ma si trova davanti alcune monache che stanno riparando le travi a forma di parallelepipedo che attraversano il soffitto della stanza rettangolare esattamente lungo le diagonali del soffitto; ogni trave congiunge un angolo della stanza con il centro del soffitto. C'è una linea rossa decorativa che corre in mezzo alla base di ciascuna trave e coppie di linee rosse disegnano ciascuna delle diagonali del soffitto.*)

Lucia Forse sarà una cosa lunga...

Prima monaca No, abbiamo già preso le misure della stanza: sono $3\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$. Sapendo la misura della distanza di un vertice del rettangolo del soffitto al centro del soffitto, abbiamo già tagliato quattro travi uguali a forma di parallelepipedo con tale lunghezza.

Seconda monaca La sezione di ciascuna trave è quadrata e ha lato di $10\,\mathrm{cm}$. Ma abbiamo dovuto tagliare le punte di ciascuna trave in modo tale che queste si possano incastrare senza lasciare interstizi contro le pareti della stanza o al centro del soffitto, né scalini tra una trave e l'altra.

Terza monaca Insomma ogni trave ha esattamente due lati che non toccano un'altra trave o il soffitto.

Gertrude (*Rivolta a Lucia*) Qual è il rapporto tra il volume delle travi a parallelepipedo originariamente tagliate e il volume delle parti rimosse dalle travi per incastrarle senza lasciare interstizi né scalini?

13. *DURANTE LA RICREAZIONE* ——— Sandro Campigotto

Prima monaca Considerate i numeri n con le seguenti proprietà: dividendo 545 con n si ha resto r; dividendo 682 per n si ottiene resto $2r$; dividendo 1227 per n viene resto $3r$.

Gertrude Qual è il massimo numero n con le proprietà elencate?

14. *NEL MONASTERO* ——— Anna Ulivi

In un luogo appartato vicino al muro di cinta.

Egidio (*Scrivendo su un foglio*) Consideriamo un trapezio isoscele $ABCD$ con base minore CD di $6\,\mathrm{cm}$ e tracciamo la bisettrice di $\widehat{D}$ che incontra la base AB in E. Sia F il punto di incontro di DB e CE. Si sa che $CF = FE$ e CE è lungo $14\,\mathrm{cm}$. (*Lo passa a Gertrude*)

Gertrude (*Sciaguratamente*) Qual è l'area del trapezio?

15. *LA CUCINA COMPLETA* ——— Sandro Campigotto

Pennellone Al primo che telefona con la risposta corretta di quanti sono i numeri di tre cifre in cui la cifra delle decine è più grande di almeno una delle altre cifre, regaleremo la cucina completa!

A.M. QUAL È LA RISPOSTA CORRETTA?

16. *NELLA LOCANDA* ——— Sandro Campigotto

Renzo Che gioco fate con quel dado ben bilanciato a 6 facce?

Locandiere Dopo un lancio, cancello il numero sulla faccia superiore del dado e lo sostituisco con il suo doppio.

Renzo Ma qual è la probabilità che al quarto lancio esca un numero dispari?

Locandiere Non è zero.

[*Dare come risposta la somma tra il numeratore ed il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

17. *NELLA BIBLIOTECA* ——— Sandro Campigotto

Don Ferrante Lucia, prova a rispondere. (*Inizia a leggere*) Dato un triangolo equilatero ABC, siano P, Q e R punti interni al triangolo tali che $PB = PC$, $PA = 15\,\mathrm{cm}$, $QB = QA$, $QC = PA$, $RA = RC$ e $RB = QC$. Il rapporto tra l'area del triangolo ABC e quella del triangolo PQR è 16. Quanti millimetri è lungo il lato AB?

Lucia Ma il problema non ha soluzione unica!

Don Ferrante (*Riprendendosi dalla sorpresa e con un tono di rimprovero*) Allora dimmi la somma di tutte le soluzioni.

18. ***IL SACCHETTO*** — Anna Ulivi

Don Ferrante Ecco un sacchetto che contiene palline di 3 colori diversi: verdi, rosse e blu.

Donna Prassede Quante palline ci sono per ciascun colore?

Don Ferrante Apri il sacchetto!

Donna Prassede Non voglio aprirlo solo per una curiosità così meschina.

Don Ferrante (*Con un sogghigno*) Ti assicuro che nel sacchetto ci sono al massimo 13 palline; la quantità di palline verdi è maggiore di quella di rosse che è maggiore di quella di blu. (*Prende un foglio; ci scrive sopra un numero e lo mostra a Donna Prassede*) Questo è il prodotto delle tre quantità.

Donna Prassede Non ho abbastanza dati: ci sono almeno due palline blu?

A.M. Ma Donna Prassede sa che solo una delle risposte le permetterà di chetare la sua curiosità. Nel caso in cui la risposta di Don Ferrante non permettesse a Donna Prassede di determinare come sono ripartiti i colori, quali sarebbero le due possibili partizioni rimaste?

[*Dare come risposta la somma dei due numeri* $100a+10b+c$ *con* a *il numero di palline verdi,* b *il numero di palline rosse e* c *il numero di palline blu.*]

19. ***A CENA*** — Silvia Sconza

Don Ferrante Peccato che il quoziente di 1624 nella divisione con 4 non sia un numero primo, perché sarebbe stata una sequenza interessante: 1621 è primo, 1622 è $2 \cdot 811$ e 811 è primo, 1623 è $3 \cdot 541$ e 541 è primo.

Lucia Mi perdoni, illustrissimo! Ma non sarebbe stato possibile perché non esistono quadruple di numeri come quella che desiderava. Invece ci sono molte sequenze di tre numeri consecutivi n, $n+1$ e $n+2$ tali che n è primo, $\frac{n+1}{2}$ è primo e $\frac{n+2}{3}$ è primo. A Lecco tali numeri n la gente li chiama numeri *della provvidenza.*

A.M. Come ha ragione! Già i numeri della provvidenza inferiori a 1000 sono molti: qual è la loro somma?

20. ***NEL LAZZARETTO*** — Andrea Giusto

Don Rodrigo (*Rivolto ad altri due nobili appestati*) Ormai siamo morenti. Perché non ci distraiamo con un gioco con le pistole?

Conte Attilio Spiega.

Don Rodrigo Inizio io e sparo a te. Se non sei colpito, lanci un doblone: se esce testa spari a quella porta; se esce croce spari a Don Juan. Se Don Juan non è colpito (che tu abbia sparato alla porta o a lui), Don Juan spara a me. Se io non sono colpito, ricomincio e sparo a te. E così via. Il gioco termina quando uno dei tre giocatori viene colpito.

A.M. Ritenendo che, viste le condizioni di Don Rodrigo, del Conte Attilio e di Don Juan, ciascuno colpisce il bersaglio prefissato con probabilità $\frac{1}{2}$, qual è la probabilità che al termine del gioco il Conte Attilio abbia colpito la porta esattamente una volta?

[*Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

21. ***LA PERFEZIONE*** — Sandro Campigotto e Giuseppe Rosolini

Agnese Con $n¡$ indico il prodotto di tutti i fattoriali da 1 fino a n, cioè $n¡ \overset{\text{def}}{=} 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!$. Dico che m è la *perfezione* di n se $\dfrac{m¡}{n!}$ è il quadrato di un numero intero. Sai quali sono le coppie di numeri (m, n) tali che m sia la perfezione di n?

Perpetua No di certo, ma è chiaro dalle prime coppie di perfezioni che, per ogni n, c'è al massimo una perfezione di n.

Agnese Ti sbagli! Si trovano già tre numeri n_1, n_2 e n_3 minori di 10 per cui esistono due perfezioni diverse m_i' e m_i'', $i = 1, 2, 3$.

A.M. Quali sono le perfezioni m_1', m_1'', m_2', m_2'', m_3' e m_3''?

[*Dare come risposta* $m_1' \cdot m_1'' + m_2' \cdot m_2'' + m_3' \cdot m_3''$.]

Gara di matematica a squadre femminile 2020
Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Sandro Campigotto, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Bobbio, Giulia Gaggero, Andrea Giusto, Bruk Mohamed, Cecilia Oliveri, Damiano Poletti, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso, Anna Ulivi.
Sono tutti ex-giocatori iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Il numero dispari minore di 15000 che richiede il massimo numero di pressioni del pulsante è $3^8 = 6561$ e $2 \cdot 3^8 < 15000$.
La risposta è `0009`.

Soluzione del problema 2. Dato che ogni numero si scrive come somma di potenze distinte di 2 a coefficienti 0 e 1, i polinomi P richiesti sono 2019 poiché i numeri 0 e 1 si ottengono con polinomi di grado zero.
La risposta è `2019`.

Soluzione del problema 3. La condizione imposta è equivalente a chiedere che esista un intero a con $ab + b! = b(a + (b-1)!) = 10000$, cioè $a = \frac{10000}{b} - (b-1)!)$. In particolare $b \mid 10000$ e $b! < 10000$. Poichè $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ i fattori primi di b devono essere al massimo 2 e 5; dato che $5! < 10000$, ma $8! > 10000$, si ha che $b = 1, 2, 4, 5$.
La risposta è `0012`.

Soluzione del problema 4. Renzo fa guadagnare $\frac{8}{5}$ di ora a Tonio. Restano $4\,\mathrm{h} - (2\,\mathrm{h} + \frac{8}{5}\,\mathrm{h}) = \frac{2}{5}\,\mathrm{h} = 24\,\mathrm{min}$.
La risposta è `0024`.

Soluzione del problema 5. Cambiando segno ad un numero n, il risultato dell'espressione diventa $120 - 2n$. Segue perciò che si possono ottenere soltanto numeri pari e che si deve cambiare segno al maggior numero di numeri la cui somma sia $\dfrac{120-88}{2} = \dfrac{32}{2} = 16$. La lista più lunga è $1, 2, 3, 4, 6$, la risposta è $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144$.
La risposta è `0144`.

Soluzione del problema 6. Si dimostra per induzione dall'ultima uguaglianza che $n * m = m!(n * 0)$. Grazie alla prima uguaglianza e alla proprietà commutativa, si trova che $0 * n = n!$ dato che $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(m+1) = (m+1)f(m) \end{cases}$ è la definizione induttiva di $n!$. Per determinare l'esponente di 5 che compare nella fattorizzazione di $2020! \cdot 2019!$ si trova che

$$\left[\frac{2020}{5}\right] + \left[\frac{2020}{25}\right] + \left[\frac{2020}{125}\right] + \left[\frac{2020}{625}\right] = 404 + 80 + 16 + 3 = 503;$$

dato che $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, l'esponente di 5 in $2019!$ è 502.

La risposta è `1005`.

Soluzione del problema 7. Le affermazioni di due persone tra la prime dieci sono in cotraddizione; così per le persone dalla undicesima in poi: in ciascun gruppo al massimo una persona dice la verità. Il massimo possibile di persone sincere è effettivamente due quando il terzo è sincero e il dodicesimo è sincero. Per quanto riguarda il minimo numero di persone sincere, è coerente che le prime dieci affermazioni siano false; in quel caso, effettivamente l'undicesimo dice il vero, dunque il numero minimo di persone che dicono il vero è 1.
La risposta è `0037`.

Soluzione del problema 8. Per determinare un triangolo come richiesto, bisogna scegliere tre vertici tra i venti dell'icosagono, escludendo quelli con 2 lati consecutivi sul perimetro e quelli con un lato sul perimetro

$$\binom{20}{3} - 20 - 20 \cdot 16 = 800.$$

La risposta è `0800`.

Soluzione del problema 9. La somma è

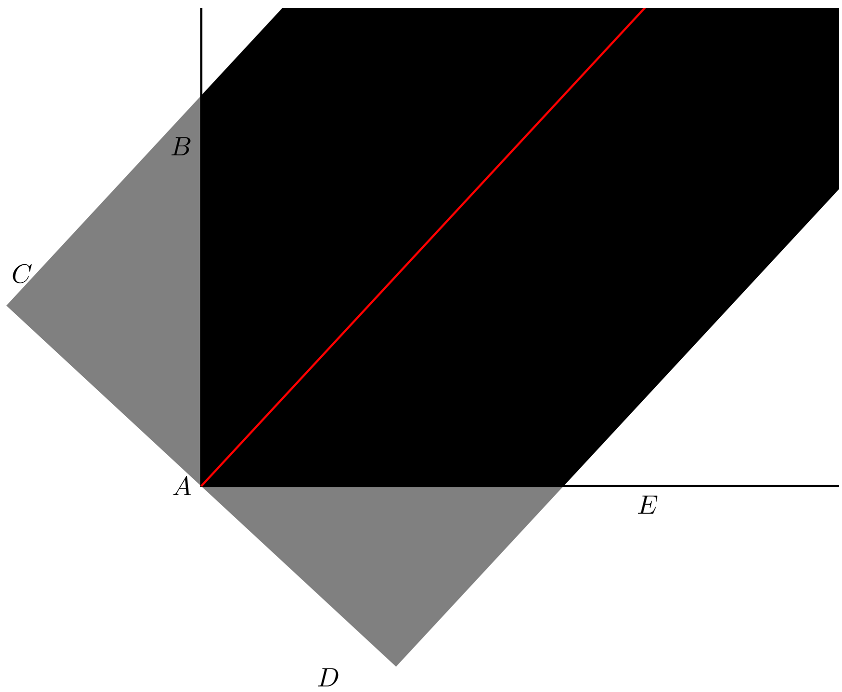
$$\begin{aligned}
3 + 33 + 333 + \ldots + \overbrace{33\ldots3}^{100\text{ cifre}} &= \frac{9 + 99 + 999 + \ldots + \overbrace{9\ldots9}^{100\text{ c.}}}{3} \\
&= \frac{(9+1) + (99+1) + \ldots + (\overbrace{9\ldots9}^{100\text{ c.}}+1) - 100}{3} \\
&= \frac{10 + 100 + \ldots + 1\overbrace{0\ldots0}^{100\text{ c.}} - 100}{3} \\
&= \frac{\overbrace{1\ldots1}^{98\text{ c.}}010}{3} = \frac{\overbrace{1\ldots1}^{96\text{ c.}}00000 + 11010}{3} = \frac{\overbrace{1\ldots1}^{96\text{ c.}}0}{3}10^4 + \frac{11010}{3} \\
&= \overbrace{370\ldots370}^{32\text{ volte}} \cdot 10^4 + 3670 = \overbrace{370\ldots370}^{32\text{ volte}}3670
\end{aligned}$$

La risposta è `0336`.

Soluzione del problema 10. I numeri con una cifra diversa da 0 sono 1, quelli con due cifre sono 27, con tre sono 243, con quattro sono 729.
La risposta è `1000`.

Soluzione del problema 11. Se D dice il vero, i bugiardi sono 1710; è un numero divisibile sia per 2 che per 3 che per 5, quindi nessuno tra A, B, C e D dice il falso. Perciò D dice il falso. Non possono essere 3420 bugiardi perché 3420 è multiplo di 2, 3 e 5; in tal caso ci sono almeno 3 sinceri, A, B e C che dicono il vero. Quindi il massimo numero possibile di bugiardi è 3419.
La risposta è `3419`.

Soluzione del problema 12. Dato che le altezze dei solidi sono uguali, il rapporto tra i volumi coincide con il rapporto tra le basi. Inoltre si può considerare che ogni trave traccia una diagonale di un quarto rettangolare della stanza. Perciò nella figura



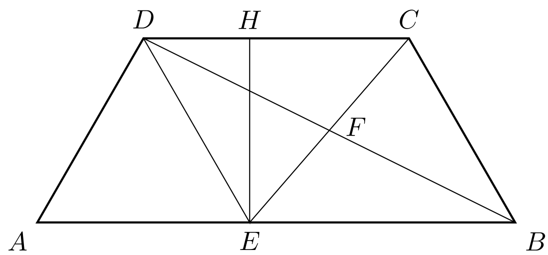
si vede che il taglio deve essere fatto per ottenere l'incastro senza interstizi. L'angolo nell'area grigia in B è complementare dell'angolo in E in quanto complementari di angoli complementari. L'area grigia è uguale a un triangolo rettangolo con altezza relativa all'ipotenusa di lunghezza $5\,\mathrm{cm}$ e simile al triangolo rettangolo ottenuto con due lati perpendicolari della stanza e la diagonale appropriata. L'altezza relativa all'ipotenusa di questo triangolo rettangolo è $\frac{12}{5}\,\mathrm{m}$. Perciò l'area del rettangolo tagliato da una trave è

$$12\,\mathrm{m}^2\left(\frac{5\,\mathrm{cm}}{\frac{12}{5}\,\mathrm{m}}\right)^2 = \frac{5^4}{2^2\cdot 3}\,\mathrm{cm}^2.$$

L'area (della base) di una trave è $2.5\,\mathrm{m}\cdot 10\,\mathrm{cm} = 5^4\cdot 2^2\,\mathrm{cm}^2$. Il rapporto tra le seconda e la prima è $2^4\cdot 3 = 48$.
La risposta è `0048`.

Soluzione del problema 13. $545 = pn + r$ e $682 = qn + 2r$, dunque $408 = (2p - q)n$. Così $n|408$. Si esclude $n = 408$ perché il resto della divisione di 545 per 408 è 137 mentre quello della divisione di 1227 è 3 dato che $3\cdot 408 + 3 = 1227$. Si esclude anche $n = 204$ dato che anche il resto della divisione di 545 per 204 è 137. Per $n = 136$ si ha che il resto della divisione di 545 per 136 è 1, quello della divisione di 682 è 2 e quello della divisione di 1227 è sicuramente 3.
La risposta è `0136`.

Soluzione del problema 14. I triangoli BFE e DFC sono uguali perché hanno coppie di angoli alterni interni e $CF = FE$.



Siano $a = CD = 6\,\text{cm}$ e $b = CE = 14\,\text{cm}$. Il quadrilatero $BCDE$ è un parallelogramma in quanto BE e DC sono uguali e paralleli. L'angolo in A coincide con l'angolo in $\widehat{ABC}$ per ipotesi; questo è uguale all'angolo $\widehat{AED}$ in quanto corrispondenti ed è uguale all'angolo $\widehat{CDE}$ in quanto opposti in un parallelogramma, così è uguale anche a $\widehat{ADE}$. Perciò il triangolo AED è equilatero.
Si fissi $x = HE$ dove H è il piede della perpendicolare da E a CD. Perciò $HE = HD\sqrt{3}$ e

$$x^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - a\right)^2 = b^2$$

da cui si ottiene la condizione $4x^2 - 2ax\sqrt{3} + 3a^2 - 3b^2 = 0$ che è verificata da

$$x = \frac{a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 - 12a^2 + 12b^2}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a + \sqrt{4b^2 - 3a^2}\right).$$

L'area del trapezio è

$$HE \cdot (CD + HD) = x(a + \frac{x}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a + \sqrt{4b^2 - 3a^2}\right)\frac{5a + \sqrt{4b^2 - 3a^2}}{4}.$$

Dato che $4b^2 - 3a^2 = 676 = 26^2$, il valore è $112\sqrt{3} \approx 193.99$
La risposta è `0193`.

Soluzione del problema 15. Sono 900 meno il numero dei numeri di tre cifre in cui la cifra delle decine è minore o uguale delle altre due cifre. Per la cifra $c = 0$ sono 90; per ogni altra cifra $c \neq 0$, questo numero è $(10 - c)^2$. In totale sono

$$90 + \sum_{c=1}^{9}(10 - c)^2 = 90 + \sum_{c=1}^{9} c^2 = 90 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 375.$$

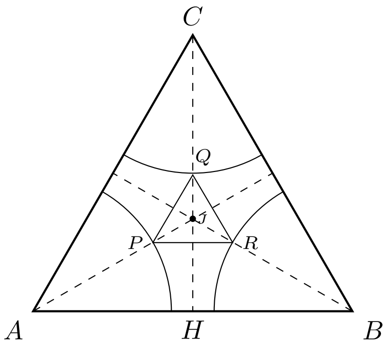
La risposta è `0525`.

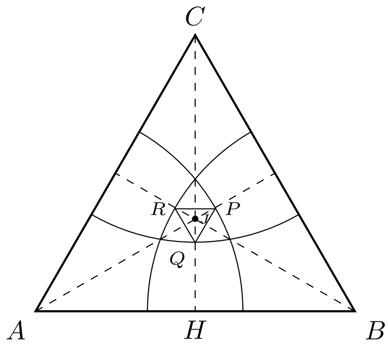
Soluzione del problema 16. Se n_i sono i numeri pari sul dado prima del lancio i, la probabilità $P(n_i)$ che al lancio esca un numero pari e i numeri pari sul dado siano n_i dopo il lancio è $\frac{n_i}{6}$ ed è $[1 - P(n_i)]$ la probabilità che esca un numero dispari e i numeri pari sul dado siano n_i+1. Perciò $t(3) = P(3)P(3)P(3) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ è la probabilità che i numeri pari siano 3 dopo il terzo lancio; $t(4) = P(3)P(3)(1-P(3)) + P(3)(1-P(3))P(4) + (1-P(3))P(4))P(4) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{37}{72}$ è la probabilità che i numeri pari siano 4 dopo il terzo lancio; $t(5) = P(3)(1 - P(3))(1 - P(4)) + (1 - P(3))P(4)(1 - P(4)) + (1 - P(3))(1 - P(4)P(5) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{5}{6} = \frac{1}{3}$ è la probabilità che i numeri pari siano 5 dopo il terzo lancio. [E $t(6) = (1 - P(3))(1 - P(4))(1 - P(5)) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ è la probabilità che i numeri pari siano 6 dopo il terzo lancio.]
La probabilità che al quarto lancio esca un numero dispari è

$$\frac{t(3)}{2} + \frac{t(4)}{3} + \frac{t(5)}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{37}{72} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{125}{432}.$$

La risposta è `0557`.

Soluzione del problema 17. Si fissi $r = 15\,\text{cm}$ e $p^2 = 16$. I punti P, Q e R sono ciascuno l'intersezione dell'asse di un lato con la circonferenza di centro il vertice opposto e raggio r. Dato che ABC è equilatero, le altezze coincidono con gli assi dei lati. Perciò i triangoli PQR e ABC sono simili.





Sia J il (bari-, in-, circo-)centro del triangolo equilatero ABC; è anche l'incentro del triangolo (equilatero) PQR. Dato che le aree hanno rapporto p^2, le misure lineari hanno rapporto p; in particolare, questo è il rapporto tra CJ e QJ. Inoltre, visto che $CJ = 2JH$, è $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}CH = \sqrt{3}CJ$.
I casi sono due: $CJ - QJ = r$ oppure $CJ + QJ = r$. Nel primo caso, si trova che $CJ = \frac{p}{p-1}r$; così

$$AB = \sqrt{3}CJ = \frac{p\sqrt{3}}{p-1}r.$$

Nel secondo caso $CJ = \frac{p}{p+1}r$ e

$$AB = \sqrt{3}CJ = \frac{p\sqrt{3}}{p+1}r.$$

Perciò la loro somma è

$$rp\sqrt{3}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{r2p^2\sqrt{3}}{p^2-1} \approx 55.43\,\mathrm{cm}$$

La risposta è `0554`.

Soluzione del problema 18. Consideriamo tutte le terne di numeri la cui somma è minore di 14 e vogliamo trovare delle terne il cui prodotto degli elementi sia uguale ad almeno un'altra terna, altrimenti dopo aver letto il numero sul bigliettino Donna Prassede avrebbe conosciuto la partizione. Inoltre devono essere almeno 3 terne con lo stesso prodotto altrimenti la domanda di Donna Prassede l'avrebbe sempre portata ad una soluzione univoca. Quindi controlliamo per quali terne il prodotto degli elementi è uguale a quello di almeno altre due terne.

$1\cdot2\cdot3=6$	$1\cdot2\cdot4=8$	$1\cdot2\cdot5=10L$	$1\cdot3\cdot4=12$	$1\cdot2\cdot6=12$
$1\cdot3\cdot5=15$	$1\cdot2\cdot7=14$	$1\cdot3\cdot6=18$	$1\cdot4\cdot5=20$	$1\cdot2\cdot8=16$
$1\cdot3\cdot7=21$	$1\cdot4\cdot6=\underline{24}$	$1\cdot2\cdot9=18$	$1\cdot3\cdot8=\underline{24}$	$1\cdot4\cdot7=28$
$1\cdot5\cdot6=30$	$1\cdot2\cdot10=20$	$1\cdot3\cdot9=27$	$1\cdot4\cdot8=32$	$1\cdot5\cdot7=35$
$2\cdot3\cdot4=\underline{24}$	$2\cdot3\cdot5=30$	$2\cdot3\cdot6=36$	$2\cdot4\cdot5=40$	$2\cdot3\cdot7=42$
$2\cdot4\cdot6=48$	$2\cdot3\cdot8=48$	$2\cdot4\cdot7=56$	$2\cdot5\cdot6=60$	$3\cdot4\cdot5=60$
$3\cdot4\cdot6=72$				

Questo accade solo con $(1,4,6)$, $(1,3,8)$ e $(2,3,4)$. Quindi la risposta da è $641 + 831 = 1472$. La risposta è `1472`.

Soluzione del problema 19. A parte la prima tripla 13, 14, 15, le altre devono essere tali che $n \equiv 1, 7 \pmod{10}$. Del resto $n, \dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n+2}{3} \equiv 1 \pmod{2}$; dunque, per appropriati m e h si ha che $n + 1 = 2 + 4m$ e $n + 2 = 3 + 6h$, da cui $n \equiv 1 \pmod{4}$ e $n \equiv 1 \pmod{6}$, cioè $n \equiv 1 \pmod{12}$. Si devono considerare perciò i numeri primi 37, 61, 97, 157, 181, 241, 277, 337, 397, 421, 457, 541, 577, 601, 661, 757, 877, 937, 997. L'elenco delle triple che verificano le condizioni richieste è il seguente:

$$\begin{array}{rcc} 13 & 14 = 2 \cdot 7 & 15 = 3 \cdot 5 \\ 37 & 38 = 2 \cdot 19 & 39 = 3 \cdot 13 \\ 157 & 158 = 2 \cdot 79 & 159 = 3 \cdot 53 \\ 541 & 542 = 2 \cdot 271 & 543 = 3 \cdot 181 \\ 877 & 878 = 2 \cdot 439 & 879 = 3 \cdot 293 \end{array}$$

La somma richiesta è $13 + 37 + 157 + 541 + 877 = 1625$.
La risposta è `1625`.

Soluzione del problema 20. Sia $p(n)$ la probabilità che alla fine il Conte Attilio abbia colpito esattamente n volte la porta. Sia $p(V_0)$ la probabilità che dopo un giro non siano state colpite né persone né la porta, e sia $p(V_1)$ la probabilità che dopo un giro sia stato colpita la porta e nessuna persona. Siano $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ rispettivamente le probabilità che in un giro venga colpito Don Rodrigo, il Conte Attilio e Don Juan, e non venga colpita la porta. Allora si ha che $p(0) = p(B) + p(C) + p(A) + p(V_0) \cdot p(0)$, da cui

$$p(0) = \frac{p(B) + p(C) + p(A)}{1 - p(V_0)}.$$

Inoltre, $p(1) = \frac{1}{16} + p(V_1) \cdot p(0) + p(V_0) \cdot p(1)$, da cui

$$p(1) = \frac{\frac{1}{16} + p(V_1) \cdot p(0)}{1 - p(V_0)},$$

dato che la probabilità che nel giro venga colpita prima la porta è $\frac{1}{16}$. A questo punto restano solo da calcolare le varie probabilità:

$$\begin{array}{lll} p(B) = \frac{1}{2} & p(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} & p(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ p(V_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} & p(0) = \frac{6}{7} & p(V_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \end{array}$$

Perciò $p(1) = \frac{13}{98}$.
La risposta è `0111`.

Soluzione del problema 21. Le coppie di perfezioni con seconda componente minore di 10 sono $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 2)$, $(8, 3)$, $(8, 4)$, $(12, 6)$, $(14, 8)$, $(14, 9)$, $(16, 8)$, $(16, 9)$ e $(18, 7)$.
La risposta è `0456`.