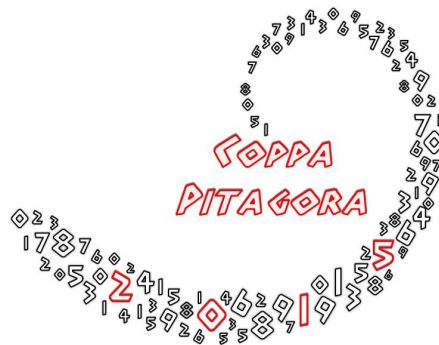


## Scadenze importanti:

- A 20 minuti dall'inizio: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata tramite consegna da parte del capitano dell'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- A 40 minuti dall'inizio: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande possono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- A 90 minuti dall'inizio: termine della gara.



# SECONDA COPPA PITAGORA

## *Un gioco... d'equilibrio!*

### Testi dei problemi

*Nella celebre scuola da lui fondata, Pitagora incontra diversi allievi che si cimentano con invenzioni, scoperte, meccanismi e ragionamenti... Il famoso matematico dispensa a tutti i suoi consigli e lascia a voi, discepoli del 2015, trovare alcune risposte...\**

### 1. QUESTIONE DI DITA

DISCEPOLO: «Sono un po' perplesso maestro... Secondo la tavola delle misure di Atene, un palmo ateniese sono quattro dita ateniesi, un piede ateniese sono quattro palmi ateniesi e un cubito ateniese corrisponde a un piede ateniese e mezzo...».

PITAGORA: «È corretto, ma tieni conto che qui non siamo ad Atene...».

DISCEPOLO: «Dunque è per questo che questa stoffa che arriva dall'Egitto è stata dichiarata essere lunga 10 cubiti faraonici, ma misura 270 dita ateniesi!».

PITAGORA: «Già... E tu ora dovresti sapermi dire di quante dita ateniesi bisogna aggiungere a un cubito ateniese per ottenere un cubito faraonico?».

### 2. LA BILANCIA

DISCEPOLO: «Maestro, guarda qua! Sto utilizzando questa bilancia a due piatti per comprendere l'equivalenza tra questi solidi... Ho messo sul primo piatto 50 cubi tutti uguali tra loro e sul secondo piatto 10 piramidi dello stesso tipo e 40 sfere identiche tra loro! La bilancia così, come si vede, è in equilibrio, ma non riesco a capire a quanti cubi corrisponda una piramide».

PITAGORA: «Devi considerare anche questa seconda bilancia, dove 10 piramidi su un piatto sono perfettamente equilibrate da 20 sfere più 20 cubi sul secondo piatto».

*[Dare come soluzione il numero intero di cubi che corrispondono a una piramide]*

### 3. LE IMBARCAZIONI

DISCEPOLO: «Stiamo organizzando le imbarcazioni per arrivare a Crotona, come da te richiesto, maestro!».

PITAGORA: «Bene, che tutti i 132 discepoli più me siano imbarcati!».

DISCEPOLO: «Sì, maestro, ma abbiamo solo 37 imbarcazioni, alcune da 3 posti, altre da 4».

PITAGORA: «Ottimo, io salirò in una imbarcazione da 4 posti e in questo modo tutti i posti saranno occupati e nessuno rimarrà a terra!».

*[Dare come soluzione il numero di imbarcazioni da 4 posti che ci sono]*

### 4. LO STORICO

DISCEPOLO: «Questa iscrizione, maestro Pitagora, si riferisce a quando tu avevi solo 5 anni!».

PITAGORA: «Allora significa che porta come anno il 201 dalla Prima Olimpiade».

DISCEPOLO: «Dici bene maestro... Stavo osservando che la somma delle cifre di questa data è maggiore del prodotto delle cifre che la compone. E ciò si ripete per diversi anni!».

PITAGORA: «Mi gioco i sandali che hai già fatto il conto di quanti anni ci vogliono, a partire dal 201 dalla Prima Olimpiade, prima che il prodotto delle cifre superi la somma delle cifre che compongono l'anno!».

---

\* Le unità di misura e le date riportate nei quesiti hanno fondamenti storici. La numerazione greca antica è stata tradotta nella notazione attuale, usando le cifre arabe e il sistema di numerazione posizionale decimale.

## 5. L'ALTALENA

DISCEPOLO: «Maestro, maestro...non è come potrebbe sembrare!».

ALTRO DISCEPOLO: «Io e Rufus non stiamo perdendo tempo su questa altalena a due bracci... Stiamo cercando di comprenderne le leggi della natura che la governano! Ancora nessuno l'ha fatto!».

PITAGORA: «Se è come dici, allora saprai rispondere a questo quesito: se Rufus pesa il triplo di te e la lunghezza della parte dell'altalena su cui sta seduto è il doppio rispetto alla rimanente parte, quanti discepoli aventi un peso pari alla metà del tuo serviranno dall'altra parte per tenere l'altalena in perfetto equilibrio?».

## 6. IL MUSICISTA

DISCEPOLO: «Maestro, ho appreso della grande scoperta da te fatta in merito alle note musicali. Dimmi se sbaglio: preso un monocordo formato da una corda di una certa lunghezza, pizzicandola ho la prima nota della scala, la seconda nota si trova pizzicando la corda con un rapporto 8:9, la terza con un rapporto 64:81, la quarta nota tenendo un rapporto 3:4, la quinta 2:3, mentre per la sesta serve un rapporto 16:27 e infine per la settima 128:243».

PITAGORA: «Hai studiato bene, è corretto! Questi rapporti li ho trovati combinando tra loro i tre rapporti fondamentali 1:2, 2:3, 3:4».

DISCEPOLO: «Se ho una corda lunga 90 dita ed essa suona la prima nota, pizzicandola a 80 dita essa suonerà la seconda nota! Ma se la corda lunga 90 dita suonasse la terza nota e io volessi suonare la settima nota, a quante dita dovrei pizzicare la corda?».

PITAGORA: «Questi conti son musica per le mie orecchie!!!».

## 7. RUOTE DENTATE

DISCEPOLO: «Maestro, ho realizzato queste tre ruote dentate, come mi avevate chiesto: una con 9 denti, una con 14 denti, una con 21 denti».

PITAGORA: «Ora le inserisco in questo ingranaggio, prima di farlo, però, colorerò, in ogni ruota, il dente rivolto a Nord».

DISCEPOLO: «Perché fai questo, maestro? Non ti basta che le ruote si incastrino e... ruotino a dovere?».

PITAGORA: «Voglio verificare dopo quanti giri le ruote avranno nuovamente tutti i denti colorati rivolti contemporaneamente a Nord... Non è un conto complicato secondo me, tu che dici?».

*[Dare come soluzione il numero di giri che deve compiere la ruota con 9 denti per tornare nella condizione descritta da Pitagora]*

## 8. L'ISOLA DI SAMO

DISCEPOLO: «Ho saputo che l'isola dove sei nato, sommo Pitagora, è abitata da due genere di abitanti: quelli che sono fedeli a Giove dicono sempre la verità, mentre i seguaci di Ermes mentono sempre!».

PITAGORA: «Ciò che dici è vero ed io come sai non mento!».

DISCEPOLO: «Dall'ultimo censimento so che a Samo abitano – incredibile, ma vero! – 9999 abitanti».

PITAGORA: «Benissimo, stiamo per sbarcare a Samo e io sarò il decimillesimo abitante. Appena a terra tu disporrai in fila tutti gli abitanti, di modo che ciascuno abbia una persona alla sua destra e una alla sua sinistra. Questo varrà per tutti tranne per l'ultimo della fila, il vecchio muto dell'isola, e per il primo della fila, che sarò io! Tu farai a tutti una domanda soltanto e tutti (tranne il muto!) ti risponderanno. Se le cose andranno come credo saprai con certezza quanti sono i seguaci di Ermes sull'isola».

DOPO L'ATTUAZIONE DELLE DIRETTIVE PITAGORICHE...

DISCEPOLO: «Ascoltatevi tutti e rispondete! Ognuno dica quanti seguaci di Ermes ha a fianco in questo momento!».

PITAGORA E ABITANTI DELL'ISOLA (ESCLUSO IL MUTO): «Vicino a me c'è esattamente un seguace di Ermes».

DISCEPOLO: «Per tutti i numeri della Matematica, hanno risposto tutti la stessa cosa!».

*[Dare come soluzione il numero di seguaci di Ermes presenti sull'isola]*

## 9. I TOPI DI TARANTO

DISCEPOLO: «Maestro, siamo preoccupati per le scorte di grano presenti a Taranto: un'ondata di topi sta dirigendosi là per fare razzia delle provviste di tutta la Magna Grecia!».

PITAGORA: «Gli 8 gatti che sorvegliano il tempio della dea Era faranno il loro dovere!».

DISCEPOLO: «Ma come...?».

PITAGORA: «È semplice. I roditori che tanto temete non sono astuti e mangiano solo di notte e sempre da sacchi di grano già aperti prima di aprirne di nuovi e iniziare a mangiare da quelli. Ognuno di essi divora un quarto di sacco ogni notte...Ma ci sono i gatti della dea: ognuno di essi cattura, ogni mattina, 2 topi!».

DISCEPOLO: «Ma è terribile, maestro! Dicono che l'orda è composta di 80 topi famelici!!!».

PITAGORA: «Non ti preoccupare. Quanti sacchi perderà Taranto a partire da questa notte prima che i gatti abbiano sterminato tutti i topi? Rispondi alla domanda e capirai che non ci saranno problemi di approvvigionamento per la Magna Grecia».

## 10. LE CISTERNE DI SIRACUSA

DISCEPOLO: «Maestro, dobbiamo mandare 10 schiavi a Siracusa a fare rifornimento di olio e vino!».

PITAGORA: «L'ultima volta abbiamo mandato 5 schiavi e hanno portato 180 metrete di olio e vino impiegando 12 ore. Questa volta voglio che portino 270 metrete, ma non posso mandare più di 9 schiavi! Il tempo che impiegheranno mi sembra comunque ragionevole...».

*[Dare come soluzione il numero di ore impiegato dagli schiavi, che lavorano esattamente come quelli del precedente turno]*

## 11. FREGARE IL MAESTRO NON SI PUÒ!

DISCEPOLO: «Maestro, so che tu hai acquistato per 40 monete d'argento l'ultima scatola di perle cartaginesi. Dovrebbero essercene 25».

PITAGORA: «È corretto. Mentre tu hai acquistato per 30 monete d'argento l'ultima scatola con 25 gemme alessandrine».

DISCEPOLO: «Ti propongo allora uno scambio, maestro. Io ti darò 12 gemme alessandrine in cambio di 12 perle cartaginesi. E così sia io che te avremo entrambi i tipi di perla e saremo in pareggio».

PITAGORA: «Tu vuoi fregare me, il maestro?!? Per le 12 perle non bastano 12 gemme! Ne voglio di più!».

*[Dare come soluzione il numero di gemme alessandrine che il discepolo deve dare in tutto a Pitagora]*

## 12. QUESTIONE DI RETTANGOLI

DISCEPOLO: «Maestro, se taglio una figura geometrica con una retta, ottengo due figure dello stesso tipo?».

PITAGORA: «Dipende da come tracci la retta...A ben riflettere, le figure che ottieni potrebbero essere anche più di due».

DISCEPOLO: «Se taglio un rettangolo con una retta posso ottenere due trapezi, oppure due triangoli, oppure due rettangoli!».

PITAGORA: «È vero, ma nel caso tu ottenga due rettangoli in verità nella figura se ne possono scorgere in tutto tre!».

DISCEPOLO: «Non ci avevo mai pensato...».

PITAGORA: «E allora rispondi a questo: quanti rettangoli potresti scorgere in un rettangolo che sia stato diviso da tre rette nel massimo numero di rettangoli possibili?».

### 13. QUESTIONE DI PARENTESI

DISCEPOLO: «Maestro, se in una espressione tolgo una coppia di parentesi, modifico l'espressione, vero? ».

PITAGORA: «La verità è una sola, ed è questa: che tu non sei molto intelligente!».

DISCEPOLO: «Ma ho sempre saputo che le parentesi sono importantissime nei nostri conti!».

PITAGORA: «E lo sono! Messe nel posto sbagliato potrebbero far crollare un ponte se dal risultato del tuo conto dipendesse la sua stabilità!».

DISCEPOLO: «E per quale motivo allora non sono state scritte in uno dei calcoli

$$4 : 4 : 4 : 4 \times 4 \times 4$$

per il nuovo ponte?».

PITAGORA: «Questo va domandato a chi non le ha scritte che è molto poco intelligente, dunque pericoloso! Ti chiedo di dirmi quanti risultati differenti puoi ottenere inserendo le parentesi per capire quanto sono utili!».

*[Dare come soluzione il numero di risultati diversi trovati]*

### 14. IL FALEGNAME

DISCEPOLO: «Maestro, ho ricavato da questo tronco alcuni cubi di legno, tutti della stessa misura, ora però vorrei colorare le loro facce per ottenere tanti cubi differenti tra loro».

PITAGORA: «Che cosa intendi con differenti?».

DISCEPOLO: «Intendo cubi con i colori disposti in modo tale che, preso un cubo qualsiasi, anche girandolo tra le mani più e più volte, non risulti mai uguale a nessun altro cubo!».

PITAGORA: «Hai dato una buona definizione. Ovviamente a patto che ogni faccia sia colorata con un solo colore e non abbia qualche motivo o sfumatura...».

DISCEPOLO: «No maestro, vorrei che ogni faccia avesse un unico, preciso colore ».

PITAGORA: «A questo punto allora basta fissare il numero dei colori e sarà semplice sapere quanti cubi diversi puoi ottenere».

DISCEPOLO: «Ma è magnifico! Vuoi forse dire che esiste una formula!».

PITAGORA: «Certo!».

DISCEPOLO: «Bene! Allora, con 2 soli colori qual è il massimo numero di cubi differenti che otterrò?».

### 15. POTENZE ANGOLARI

DISCEPOLO: «Maestro, chiariscimi una volta per tutte un'importante questione: nel misurare gli angoli in gradi arrivati a 360 abbiamo completato l'intero giro. Un angolo che misuri 370 gradi come lo devo considerare?».

PITAGORA: «Un angolo di 370 gradi è in verità un angolo di 10 gradi. Arrivati a 360 gradi si deve ripartire da 0 gradi, esattamente come compiute le 24 ore si riparte con un nuovo giorno!».

DISCEPOLO: «Ti ringrazio, ora che ho chiarito questa questione posso calcolare quale sia il più piccolo valore di  $n$  ( $n$  numero intero) che restituisca il più grande valore in gradi alla potenza  $2^n$ ».

PITAGORA: «Bravo! È un problema non facile. Stai attento: la risposta non è 8».

## 16. LA QUOTA DEI GEMELLI

DISCEPOLO: «Guardie, guardie, arrestateli!».

PITAGORA: «Per tutti i numeri della Matematica, che succede?».

DISCEPOLO: «Maestro, questi due discepoli non vogliono pagare la loro quota di monete di bronzo per il materiale didattico della tua scuola!».

PITAGORA: «Non vorrai mettere a morte qualcuno per questioni di soldi! Con la ragione si risolve tutto».

DISCEPOLO: «Sono questi due! Con il fatto d'essere gemelli, hanno pagato meno della quota dovuta... Ne sono certo! Infatti, prima che arrivassero questi due avevo le monete annuali di 73 discepoli, in tutto 1095 monete di bronzo; ora ne ho 1116 ed è evidente che non tornano i conti!».

PITAGORA: «Suvvia, mi sembra che sia poca la differenza e fare lo sconto per fratelli mi sembra una buona idea. Facciamo così: se ti sapranno dire qual è la percentuale di sconto che ciascun gemello ha auto-applicato alla propria quota, allora li possiamo ammettere a ragione alla nostra scuola!».

[Dare come risultato la percentuale di sconto moltiplicata per 10]

## 17. I DIVISORI PITAGORICI

DISCEPOLO: «Maestro Pitagora, sono fiero di dedicare a te questa mia scoperta! L'ho chiamata *divisore pitagorico*!».

PITAGORA: «E quale numero potrebbe mai fregiarsi del mio nome?».

DISCEPOLO: «È semplice maestro, un numero intero positivo è *divisore pitagorico* quando, privato della cifra delle unità, risulta essere divisore del numero iniziale!».

PITAGORA: «Quindi 24 è un divisore pitagorico, perché togliendo 4 resta 2, che è divisore di 24».

DISCEPOLO: «Proprio così! Ti piace questa scoperta?».

PITAGORA: «Mi piacerà se saprai dirmi quanti sono i divisori pitagorici di quattro cifre... Anzi no, quattro sono troppe e porrò questa domanda a chi so io... Da te mi accontento di sapere quanti sono i divisori pitagorici composti da due cifre, ossia quanti sono i divisori pitagorici tra i numeri minori di 100».

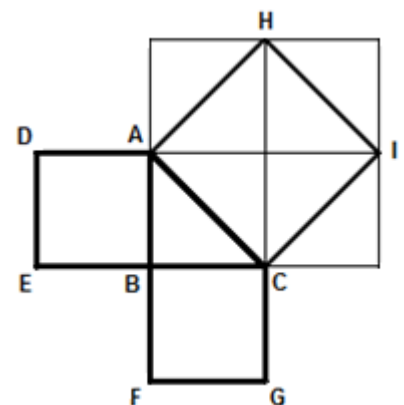
## 18. TENTANDO DI SUPERARE IL MAESTRO!

DISCEPOLO: «Maestro Pitagora, ho riscritto la tua grande scoperta – il teorema che porta il tuo nome – in una nuova forma e... funziona! Ho considerato un triangolo rettangolo e i quadrati costruiti sui lati. Ho quindi inserito i numeri naturali da 1 a 9 (una sola volta ciascuno) nei nove vertici segnati con le lettere da A ad I. Per ogni quadrato ho sommato i numeri dei 4 vertici che lo compongono. Ebbene, ho fatto in modo che la somma dei valori che hanno i quadrati costruiti sui cateti sia pari al valore che ha il quadrato costruito sull'ipotenusa!».

PITAGORA: «Molto interessante... e quali soluzioni hai trovato?».

DISCEPOLO: «Considerando come soluzione i numeri inseriti nel quadrato costruito sull'ipotenusa, ho trovato che la soluzione è 6789».

PITAGORA: «Non hai trovato *la* soluzione, ma *una* soluzione! Infatti ce n'è un'altra!»



[Trovare la seconda soluzione, dando come risultato i 4 numeri nei vertici indicati A, H, I e C in ordine crescente]

## 19. SCOMMESSE

DISCEPOLO: «Leone! Nooo...ho perso!».

PITAGORA: «Scommetto che state giocando nuovamente a *Re-Leone!!!*».

DISCEPOLO: «Scommessa vinta, Maestro. Ma io ho perso: avevo scommesso che al lancio della moneta sarebbe uscito Leone e invece è uscita la testa del Re!».

PITAGORA: «È un gioco noioso questo, alla lunga io vado sempre in pareggio. Se invece giocaste a *due con il leone e tre mezzi con il signore* le cose sarebbero più interessanti!».

DISCEPOLO: «Parli del gioco per cui si parte da un numero e ad ogni lancio della moneta se esce il leone lo si raddoppia, mentre se esce la faccia del re – o signore come dicono alcuni – lo si moltiplica per tre mezzi?».

PITAGORA: «Proprio quello! L'ultima volta che l'ho giocato sono partito da 1 e sono arrivato a 1944. Sai dirmi quanti lanci della moneta avevo fatto?».

## 20. LA STELLA PITAGORICA

DISCEPOLO: «Grande maestro, reputi me e gli altri discepoli degni della tua scuola? Possiamo fregiarci della stella pitagorica simbolo della tua scuola?».

PITAGORA: «Sai come si traccia questa stella?».

DISCEPOLO: «Certo, maestro! È sufficiente prendere un pentagono regolare e tracciare le sue diagonali, ed ecco che si forma la stella all'interno del pentagono!».

PITAGORA: «Tu e gli altri discepoli potrete portare la mia stella solo se saprete dirmi quanto vale (in gradi) l'ampiezza di ciascuna delle cinque punte della stella!».

\* \* \*

## 21. IL PROBLEMA DEI PROBLEMI

DISCEPOLO: «Maestro, maestro!».

PITAGORA: «Che c'è? Per oggi la mia giornata è conclusa. Dovevo incontrare 21 discepoli, non 22. È scritto in tutti gli editti!».

DISCEPOLI: «Sì, ma a Cuma la Sibilla ha parlato; ha detto anche che questo ventiduesimo incontro ci sarebbe stato!».

PITAGORA: «La tua è solo una scusa. Cos'altro avrebbe detto costei? Sai che la nostra mente razionale non ci permette di credere a certe cose».

DISCEPOLO: «Ha parlato di dispute matematiche e di un trofeo che sarà intitolato al tuo nome!».

PITAGORA: «Questo potrei profetizzarlo anche io senza essere un oracolo! La nostra scuola sarà ricordata nella storia!».

DISCEPOLO: «Sì, ma ha anche parlato di 20 problemi da te risolti e che ciascuno dei problemi ha determinato un numero. La somma di tutti questi numeri – ha detto la Sibilla – sarà il numero dei numeri, la soluzione al problema non previsto. Sarà un numero magico di quattro cifre perché, diviso per 3 darà resto 0, diviso per 7 darà resto 1, diviso per 11 darà resto 2, diviso per 9 darà resto 3, e la prima e l'ultima cifra saranno uguali tra loro. E solo chi indovinerà questo numero riceverà il bonus dei bonus che lo proclamerà tuo erede!».

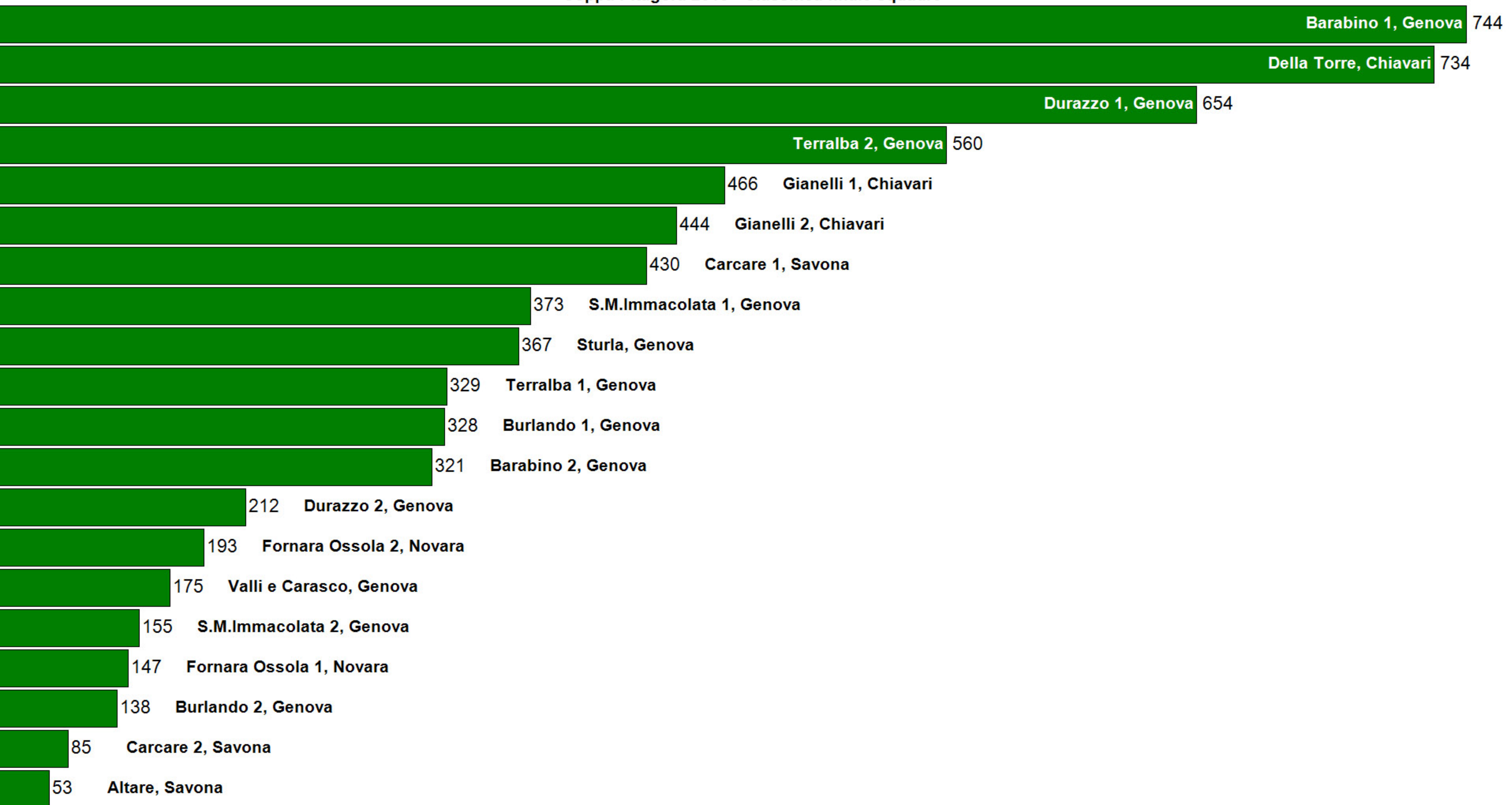
PITAGORA: «Buffonate! Non c'è bisogno di una Sibilla per calcolare il numero dei numeri! Alla Sibilla io avrei chiesto di dirmi qual è il numero di coloro che arriveranno a questo numero dei numeri. Indovinare questo numero: questa sarebbe una vera profezia che solca la storia!».

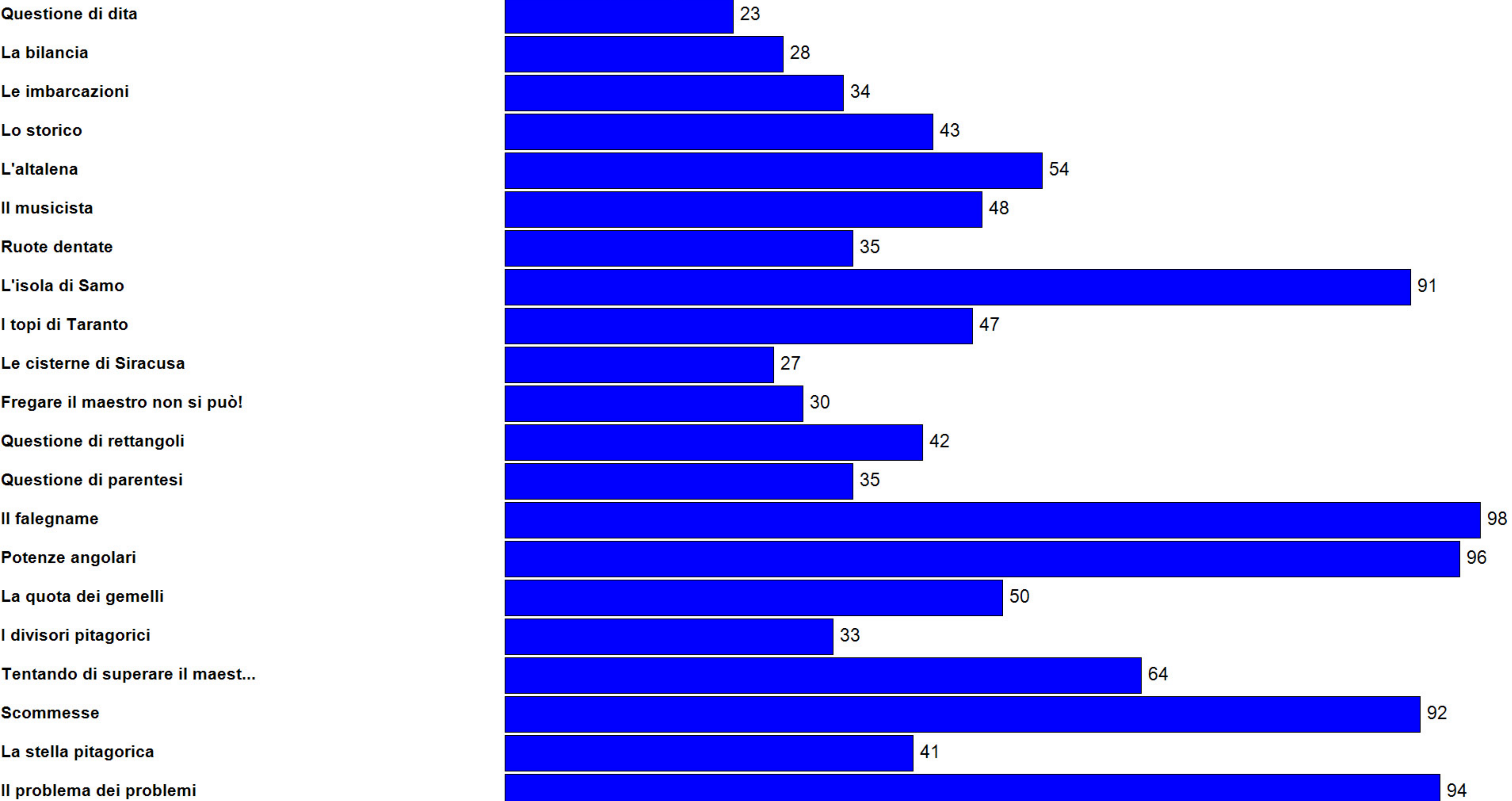
[*Dare come soluzione il numero dei numeri previsto dalla Sibilla*]

## Risposte ai problemi

NUMERO	TITOLO	SOLUZIONE
1	QUESTIONE DI DITA	0003
2	LA BILANCIA	0003
3	LE IMBARCAZIONI	0022
4	LO STORICO	0013
5	L'ALTALENA	0012
6	IL MUSICISTA	0060
7	RUOTE DENTATE	0014
8	L'ISOLA DI SAMO	3333
9	I TOPI DI TARANTO	0060
10	LE CISTERNE DI SIRACUSA	0010
11	FREGARE IL MAESTRO NON SI PUÒ!	0016
12	QUESTIONE DI RETTANGOLI	0018
13	QUESTIONE DI PARENTESI	0005
14	IL FALEGNAME	0010
15	POTENZE ANGOLARI	0010
16	LA QUOTA DEI GEMELLI	0300
17	I DIVISORI PITAGORICI	0032
18	TENTANDO DI SUPERARE IL MAESTRO!	5789
19	SCOMMESSE	0013
20	LA STELLA PITAGORICA	0036
21	IL PROBLEMA DEI PROBLEMI	9759







Carcare 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Fornara Ossola 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
S.M.Immacolata 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Gianelli 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Terralba 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Barabino 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Burlando 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Valli e Carasco	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Durazzo 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Altare	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Della Torre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Sturla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Fornara Ossola 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
S.M.Immacolata 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Gianelli 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Terralba 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Barabino 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Burlando 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Carcare 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Durazzo 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21