



- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

### Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

## 1. Non si smette mai di imparare

Vennma, Daφne, Fredmath, S-Higgs con il loro fidato amico Scoobe-Zout sono in viaggio per raggiungere i genitori di Fredmath e partire per una rilassante crociera per festeggiare il suo compleanno. Durante il viaggio, tra una chiacchiera e l'altra, Vennma disegna sul suo quadernino un rettangolo  $ABCD$  con  $AB = 20\text{mm}$  e  $BC = 40\text{mm}$ . Sulla diagonale  $AC$  costruisce un rettangolo in modo tale che  $AC$  sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per  $B$ . Allo stesso modo su  $BD$  costruisce un rettangolo passante per  $A$ . Daφne prende il rossetto e colora tutta la figura e infine esclama: "Ora è molto meglio!". *Calcolare l'area colorata ovvero l'area dell'unione dei tre rettangoli.*

## 2. Viva il mare

Summy li saluta dando loro il biglietto da visita del Capitano Kronecker. Sul biglietto è scritta un'espressione letterale. Fredmath osserva che l'espressione è un polinomio e la somma dei coefficienti è 2. Vennma fa notare a tutti che il polinomio calcolato nel doppio NON è uguale al doppio del polinomio. La differenza è il doppio del quadrato della variabile diminuito di 1. Allora Daφne annota  $p(2\clubsuit) = 2p(\clubsuit) + 2\clubsuit^2 - 1$ .

Summy ricorda che per poter incontrare il Capitano Kronecker dovranno trovare il valore del polinomio calcolato in 12. *Quale numero permetterà loro di incontrare il capitano?*

## 3. Domande scomode

Vennma è appassionata di coincidenze numeriche e nota che 2024 è divisibile per 23. Si chiede allora quali siano gli interi tra 2001 e 2099, diciamo  $20ab$ , che sono divisibili per  $ab - 1$  (nel senso di  $10a + b - 1$ ). Daφne risponde prontamente con la somma di tali numeri: qual è?

## 4. Osso sepolto

Un giorno Scoobe-Zout, mentre scava per recuperare un osso seppellito da tempo, trova un foglietto con un polinomio a coefficienti interi  $p(x)$ . Non si legge quasi niente, tranne che  $p(1) = 7$  e  $p(2) = 15$ . S-Higgs si chiede: "Quale può essere il più grande intero che divide sicuramente  $p(2024)$ ?"

## 5. Il palombaro

Il cattivo palombaro cercando di scappare da Fredmath, sul fondo del mare trova delle incisioni di una civiltà azteca. Tale lingua ha un alfabeto di 7 caratteri. Il palombaro calcola quante siano le scritture di 7 caratteri, eventualmente ripetuti, che abbiano esattamente 210 anagrammi. Che risultato ha ottenuto?

## 6. Una funzione mistica

Fredmath non capisce come calcolare il termine  $a_n$  della successione su cui sta indagando Vennma. Lei gli risponde che basta prendere l'opposto della somma dei termini  $a_d$  con  $d$  divisore positivo di  $n$  e più piccolo strettamente di  $n$ . "Sì, ma da dove si parte?" chiede Fredmath. "Da  $a_1 = 1$ , ovviamente!" risponde Vennma e conclude con il quesito: "Noi dobbiamo calcolare la somma dei prodotti  $n \cdot a_n^{2024}$  per  $n$  da 1 a 100." Quanto vale?

## 7. Labirinto misterioso

Il labirinto dove si sono intrufolati Scoobe-Zout e S-Higgs mentre scappavano dalla mummia ha la forma di una tabella  $2024 \times 2024$ . Presi dal panico, scelgono a caso un percorso più breve possibile, muovendosi nelle caselle della tabella, dall'angolo  $(1, 1)$  all'angolo  $(2024, 2024)$ . Se toccano una casella di coordinate  $(k, k + 2)$  per qualche  $k$  rimangono intrappolati e la mummia li cattura. Qual è la probabilità che riescano a scappare?

*Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

### 8. Vela in lontananza

Fredmath avvista una barca alla deriva. Essa ha una vela con forma di un quadrilatero  $ABCD$  inscrivibile in una circonferenza ha le diagonali che si incontrano in  $E$ . Fredmath osserva che  $\hat{AEB} = 60$  gradi,  $AB = 80$ ,  $BC = 85$  e  $CD = 19$ . Qual è la lunghezza di  $DA$ ?

### 9. Mistero triplo

I nostri eroi incappano in tre misteri collegati tra loro. Da  $\phi$  ne si imbatte nel primo: una successione definita per ricorrenza tale che  $a_1 = 1$  e  $3a_n = 3a_{n-1} + 10n^4 - 20n^3 + 23n^2 - 13n + 3$ . Vennma trova il mistero numero due: una successione definita da  $b_n = a_1 + \dots + a_n$ . Infine Fredmath fronteggia il terzo: un'altra successione data da  $c_n = \sqrt{b_n}$ . Per risolvere il triplo mistero devono dichiarare quanto valgono le ultime 4 cifre di  $c_{2024}$ . Cosa rispondono?

### 10. Al luna park

Mentre vaga per il luna park, Scoobe-Zout vede una ruota panoramica che è formata da 10 punti su una circonferenza, in modo che per ogni coppia di questi punti ci sia una trave a forma di segmento. Scoobe-Zout nota che non ci sono 3 travi passanti per uno stesso punto (interno alla trave). S-Higgs allora si mette a contare il numero di triangoli tracciati da una terna di travi. Quanti ne vede in tutto?

### 11. I fantasmi

Camminando per le strade di Mathville, S-Higgs incontra una successione di  $n$  fantasmi ciascuno recante un numero (sovrannaturale)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Il numero  $x_i$ , per  $i = 2, \dots, n$ , ha  $i$  cifre ed è ottenuto da  $x_{i-1}$  aggiungendo una cifra a sinistra (come ad esempio 3, 23, 723, 6723, se  $n = 4$ ).

Preso dalla disperazione, S-Higgs calcola il prodotto degli  $n$  interi. Sapendo che ha ottenuto un numero di 4, 5 o 6 cifre, quanti sono i possibili risultati trovati?

### 12. Giocando col destino

Dentro la tana del mostro misterioso Fredmath trova delle figure alquanto strane. Esse sono dei poliedri convessi, senza facce complanari, che hanno come facce solo triangoli equilateri di lato 1. Ne trova una per tipo, quante sono?