



XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 3 Maggio 2024



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Osservando di nascosto

SherLog Hodge, il famoso detective, osserva di nascosto i 35 partecipanti ad una festa. Sa che alcuni sono dalla sua parte, gli altri invece sono fedeli al suo acerrimo nemico Mongearty. Alcuni partecipanti si stringono la mano, ma solo se non si conoscevano prima. Sapendo che gli appartenenti ad una stessa fazione già si conoscevano, al massimo quante strette di mano ha potuto osservare SherLog?

2. Botta e risposta!

L'ispettore Zenonigata ha messo Lupin/3 all'angolo proponendogli la successione a_n , che rispetta la seguente legge: per ogni $n > 1$ si ha che $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \dots + (n-1)a_1$ e inoltre $a_1 = k$ per qualche k intero. Zenonigata chiede beffardo se Lupin/3 sappia calcolare la somma di tutti i valori di k per i quali esiste n tale che $a_n = 1000$. Il ladro, altrettanto beffardo, risponde correttamente e scappa, lasciando Zenonigata a mangiarsi le mani per l'occasione sprecata. Cosa ha risposto Lupin/3?

3. Rotonda pericolosa

MontyHallbano ha avuto una soffiata: una cella terroristica ha nascosto una bomba in una rotonda circolare. Il Commissario è già riuscito a localizzare la rotonda, perché sa che sui bordi ci sono 3 angeli: A e B agli estremi di un diametro e l'altro angelo X forma un angolo $\widehat{XAB} = 30^\circ$. Inoltre, con gli indizi raccolti, Fuzzy sta disegnando la mappa: traccia un altro diametro $XY = 9m$ e chiama C, D rispettivamente le intersezioni tra le rette AX e AY con la tangente alla rotonda condotta da B . M e N sono i punti medi di BX e BY . La bomba è stata piazzata nell'intersezione delle rette CM e DN . Gli artificieri hanno bisogno di conoscere la distanza precisa di A dalla bomba. Quanto vale questa distanza in cm ?

4. Blocco sul raggio

Jessica Fourier ha il classico blocco dello scrittore matematico. Per distrarsi sfida il Dr. Sette: entrambi hanno un foglio con disegnata un'identica circonferenza e devono ritagliare un quadrilatero. Entrambi i quadrilateri devono avere la stessa area. Il Dr. Sette ritaglia il quadrato inscritto nella circonferenza. Jessica invece traccia una corda AB a distanza $600mm$ dal centro C e le tangenti nei punti A e B alla circonferenza che si intersecano in P . Quindi ritaglia il quadrilatero $CAPB$. Quanto misura il raggio delle due circonferenze identiche in mm ?

5. Il destino di Wolfram [★]

Mongearty ha catturato il povero Wolfram e lo ha piazzato nel centro di un poligono regolare di 10000 vertici. Per deridere SherLog Hodge, Mongearty fa un gioco perverso: sceglie a caso un sottoinsieme C di 2024 vertici tali che non ve ne siano due opposti rispetto al centro del poligono. Poi costruisce tutti i possibili triangoli con vertici in C : se Wolfram è esterno a tutti questi triangoli avrà salva la vita. SherLog ha già calcolato quale sia la frazione f , ridotta ai minimi termini, corrispondente alla probabilità che Wolfram sopravviva. Quanto vale il numeratore di f ?

6. Ordini in codice

Mongearty impartisce ordini in codice utilizzando sequenze di esattamente tre lettere, tutte distinte, prese da un alfabeto che ha in tutto n lettere. SherLog Hodge non sa tradurre gli ordini, ma sa che il numero totale di possibili sequenze è multiplo di 13 e di 17. Quanto vale n , come minimo?

7. Domanda risolutiva

Il tenente Coulomb ha già capito chi è il colpevole, per cui gioca di psicologia per farlo confessare. La domanda che Coulomb pone, e che fa crollare il sospettato, è la seguente: in quanti dei sottoinsiemi non vuoti di $\{1, 2, \dots, 13\}$ il

prodotto degli elementi ha zero come cifra delle unità?

8. Riddle, she wrote!

La nota scrittrice di libri gialli Jessica Fourier ama piazzare qualche quesito matematico nei suoi romanzi. Nella sua ultima fatica chiede al lettore quante siano le coppie (x, y) di interi con $|y| \leq 6000$ per cui esiste un intero positivo k che soddisfa la relazione $x^2 + y^2 + 2^{2k-1} + 2^k x - 2^k y = 0$. Qual è la risposta?

9. Quanti soldi...

Zenonigata è talmente ossessionato da Lupin/3 che ha promesso che, quando lo catturerà, regalerà ai colleghi tanti MathYen quanto vale la somma delle cifre della somma delle cifre della somma delle cifre di 2024^{2025} . Quanti MathYen sono?

10. Pizzino per MontyHallbano [★]

L'ispettore Giuseppe Fuzzy, collaboratore di MontyHallbano, disegna un triangolo ABC isoscele in A . Prende poi i punti D ed E rispettivamente sui lati AC e AB tali che DE è parallelo a BC . Detta P l'intersezione fra i segmenti BD e CE , osserva che $\widehat{BPC} = 60^\circ$. Sa, inoltre, che le circonferenze inscritte nel quadrilatero $ADPE$ e nel triangolo BPC hanno raggi congruenti, e che l'altezza del triangolo ABC relativa al vertice A misura 240. Chiede quindi al commissario MontyHallbano: quanto misura il lato AC ?

11. Il trucco del sospettato

Il sospettato che Hermite Poincot sorveglia ha inscenato un gioco di magia per confondere il detective. Inizialmente ha in mano 2 palline rosse; ad ogni passaggio compie una tra le seguenti mosse:

- aggiunge una pallina blu ed una pallina rossa;
- aggiunge una pallina blu e toglie una pallina rossa;
- aggiunge due palline verdi.

Dichiara che quando avrà in mano 12 palline blu, 10 rosse e 4 verdi sparirà, inoltre vuole raggiungere l'obiettivo usando il numero minimo possibile di mosse. In quanti modi può farlo?

12. Una trappola per Mongearty

SherLog Hodge ed il fido Wolfram costruiscono una trappola per incastrare Mongearty. Si tratta di un rettangolo $ABCD$ con AB lungo 46 dm e BC lungo 20 dm . Sulla diagonale AC viene costruito un rettangolo in modo tale che AC sia un lato ed il lato ad esso opposto passi per B . Allo stesso modo su BD si costruisce un rettangolo passante per A . Se Mongearty entrerà nell'area costituita dall'unione dei tre rettangoli, la trappola scatterà. Wolfram si chiede se l'area sia sufficiente. Quanto vale l'area, in dm^2 ?

13. L'ispettore Gauget in montagna

L'ispettore Gauget si trova alla base di una montagna conica di apotema lungo 1000 m e raggio di base 250 m . Deve catturare un fuggitivo, nascosto nel rifugio che si trova sul lato della montagna a esattamente 250 m da lui verso la vetta della montagna. Per arrivare al rifugio, l'ispettore percorre la strada più corta che faccia anche un giro completo intorno alla montagna; osserva che curiosamente, la strada percorsa è per un primo tratto in salita e poi in discesa. Quanti metri è lungo il tratto in salita?

14. Scena del crimine

Sulla scena del crimine, Hermite Poincot trova un foglietto recante una sequenza di numeri: il primo termine è 1 mentre l' n -esimo termine è la somma del k -esimo termine (dove k è la parte intera della radice di n) e del valore assoluto della differenza tra n e il quadrato perfetto ad esso più vicino. Hercule nota che la differenza tra gli ultimi due numeri è 11: quanto è lunga al minimo la sequenza? *Fornire l'esponente di 2 nella fattorizzazione in fattori primi.*

15. Sinceri o menzogneri

Attorno ad una tavola rotonda siedono 10000 persone, ma purtroppo ognuna di esse potrebbe essere un membro della famigerata Organizzazione Nera. Di queste persone, 4248 pronunciano la seguente frase: "Tra me e le due persone al mio fianco si nascondono almeno due membri dell'Organizzazione"; tutte le altre invece dichiarano: "Tra me e le due persone al mio fianco si nasconde al più un membro dell'Organizzazione". Il detective Kolmogoro, dietro "suggerimento" di coNaN, conclude: "Assumendo che i membri dell'Organizzazione mentano sempre e che tutti gli altri dicano sempre la verità, è possibile che il numero di membri dell'Organizzazione sia...".

Con quanti numeri diversi Kolmogoro avrebbe potuto terminare la frase?

16. La somma per l'ispettore Gauget

Un numero n ha una scrittura consecutiva se esiste una sequenza di almeno due interi positivi consecutivi tali che la loro somma sia n . Tra i vari gadget dell'ispettore Gauget vi è il *consecutivometro*: dato un numero n , il consecutivometro restituisce il numero $s(n)$ di scritture consecutive di n . Per risolvere l'ultimo caso, l'ispettore ha bisogno di calcolare $S = s(1) + s(2) + s(3) + \dots + s(99)$. Quanto vale S ?



XXV Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 3 Maggio 2024



*Ministero dell'Istruzione
e del Merito*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Osservando di nascosto	0306
2	Botta e risposta!	1125
3	Rotonda pericolosa	0692
4	Blocco sul raggio	1341
5	Il destino di Wolfram [★]	0253
6	Ordini in codice	0052
7	Domanda risolutiva	6080
8	Riddle, she wrote!	0013
9	Quanti soldi...	0008
10	Pizzino per MontyHallbano [★]	0242
11	Il trucco del sospettato	6006
12	Una trappola per Mongearty	1610
13	L'ispettore Gauget in montagna	0800
14	Scena del crimine	3072
15	Sinceri o menzogneri	5751
16	La somma per l'ispettore Gauget	0173