

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142$$

$$\sqrt{3} \approx 1,7321$$

$$\sqrt{5} \approx 2,2361$$

$$\pi \approx 3,1416.$$

FATE BENE ATTENZIONE: *non* è necessario risolvere i problemi in successione a partire dal primo. Inoltre, non è detto che i problemi siano tutti in ordine di difficoltà crescente.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **90 minuti dall'inizio:** termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **100 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Stello matematico modello

Atto unico

di

Guglielmo Scuotilancia

Coppa Euclide – Testi dei problemi

1. I primi sassolini

Desdemona e Otello si stanno riposando seduti in Campo San Bartolomeo. Desdemona prende due sassolini e li pone sulla scacchiera come nello schema.



Desdemona Quanti sono i quadrati nel disegno che non contengono macchie nere? (*Otello la guarda accigliato, Iago sogghigna.*)

2. Gli arcieri

A San Servolo, Otello e Cassio guardano due arcieri che tirano con l'arco.

Cassio Tirano ciascuno lo stesso numero di frecce.

Otello Lo so; perché mi infastidisci con queste informazioni inutili?

Cassio Perché so che il primo colpisce il bersaglio con l'85% delle sue frecce, il secondo colpisce il bersaglio con il 90% delle sue frecce.

Otello Il secondo ha colpito il bersaglio due volte di più rispetto al primo. Prova a rispondere, saputello: quante frecce avevano a disposizione in totale i due arcieri?

3. Imbrogli colorati

Iago (*mostrando a Roderigo l'elenco di 36 persone che ha imbrogliato*) Guarda!

Roderigo Che cosa sono questi segni colorati a fianco di ciascun nome?

Iago Ciascun colore indica un tipo di imbroglio: ne tengo un elenco perché voglio evitare l'errore di ripetere lo stesso imbroglio con una persona.

Roderigo Nell'elenco si vede che hai fatto 25 volte l'imbroglio codificato con il colore verde, 28 volte quello codificato con il rosso e 15 volte quello codificato con il nero. Cinque persone hanno subito tutti e tre i tipi di imbroglio. (*Iago si rende conto che Roderigo sta scoprendo troppe cose sul suo riguardo e nasconde l'elenco.*)

Roderigo (*curioso*) Quante sono nell'elenco le persone che hai imbrogliato una sola volta? (*Iago lo guarda sorpreso.*)

4. Cercando Bianca

Cassio Bianca mi ha scritto il numero della casa dove trovarla, ma riesco a leggere solo tre delle cinque cifre: la prima è 2, la terza è 5 e la quarta è 6. Ricordo anche mi aveva detto che il numero era divisibile per 15.

Iago Beh, non sono molte le case che devi provare per trovarla.

Cassio Qual è il massimo numero di tentativi che devo fare per trovare la casa dove sta Bianca?

5. La Posta Serenissima

Otello (*entrando nell'ufficio della Posta Serenissima di Cipro*) Devo spedire questa sbarra a Venezia.

Impiegato Non si può: è lunga 50 centimetri.

Otello In che senso non si può?

Impiegato Il regolamento della Serenissima permette di spedire solo pacchi di dimensioni massime di 35 cm dalle zone di guerra.

Otello Ma è così stretta, praticamente un segmento!

Impiegato Mi dispiace. I regolamenti sono regolamenti. Se vuole, la pieghi di 90° sulla metà.

Otello (*infuriandosi*) È impossibile: è rigida. Eppoi deve arrivare intonsa al Consiglio Supremo... Tornerò. (*Esce*)

Si sentono rumori fuori scena. L'impiegato continua il suo lavoro..

Otello (*rientrando nell'ufficio della Posta Serenissima di Cipro*) Ha proprio ragione, i regolamenti sono regolamenti. Mi spedisca questo pacco, grazie. (*L'impiegato spedisce il pacco senza battere ciglio*)

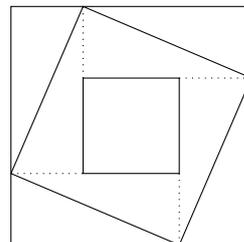
Voce fuori campo QUAL È LA LUNGHEZZA MASSIMA IN DECIMI DI MILLIMETRI DELLA SBARRA CHE SI POTREBBE SPEDIRE RISPETTANDO IL REGOLAMENTO?

12. Il primo

Desdemona (*nascosta dietro a una colonna*) Qual è il più grande divisore primo di $2^{24} - 3^{12}$? (*Cassio non risponde, Otello sorride, Iago fugge.*)

13. Il ritorno

Otello Che bello era il primo! Guarda ora questa figura:
(*Desdemona guarda con molta attenzione il foglio che Otello le porge*) Il quadrato grande ha area 86 cm^2 , quello piccolo ha area 63 cm^2 .



Desdemona È un disegno molto strano. Ma mi sembra di averlo già visto.

Otello Qual è l'area in mm^2 del quadrato intermedio posto in posizione obliqua?

14. Una pausa

Otello, Cassio, Roderigo e Iago sono dietro le quinte; aspettano di entrare per la scena finale.

Otello Vedete questi tre cappelli: questo (*ne mostra uno*) ha un 20 scritto sopra. E, se su un cappello non c'è scritto 20, allora c'è scritto 10. Chiudete gli occhi! (*Otello calza un cappello numerato in testa a ciascuno dei tre. Cassio vede quelli di Roderigo e di Iago, Roderigo vede quelli di Cassio e di Iago, ma Iago non vede nessuno degli altri.*) Sapete dire che numero è scritto sul cappello che avete in testa?

Cassio No!

Roderigo No!

Iago Sì!

Otello Ottimo! Voglio sapere: che numero ha il copricapo di Iago? E quante sono le disposizioni di cappelli coerenti con le vostre risposte?

[*Dare come risposta il prodotto delle due risposte.*]

15. I triangoli

Bianca Cassio, finalmente sei arrivato! Ho bisogno del tuo aiuto: di due triangoli, uno acutangolo e uno ottusangolo, conosco le misure in gradi di quattro dei sei angoli: sono 120, 70, 20 e 45. Qual è l'ampiezza in gradi dell'angolo maggiore tra i due angoli ignoti?

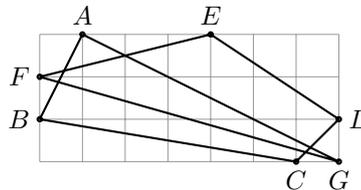
Cassio Vado a chiamare Otello e Desdemona!

16. La linea spezzata

Cassio Otello, Desdemona, ho bisogno che veniate da Bianca con me. Ha un problema.

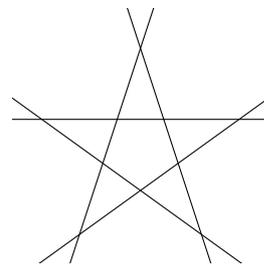
Desdemona Arriviamo, intanto ascolta quest'altro.

Otello Il lato di ogni quadratino in questo disegno (*mostra il disegno a Cassio*) è lungo 1 cm. Quanto vale in gradi la somma totale degli angoli \widehat{GAB} , \widehat{ABC} , \widehat{BCD} , \widehat{CDE} , \widehat{DEF} , \widehat{EFG} e \widehat{FGA} ?



17. Il simbolo

NdR: il progettista deve costruire un nuovo simbolo per il Consiglio Supremo della scena finale perché i membri del consiglio non saranno più 5, ma 7. Nel precedente simbolo si incrociavano cinque linee rette, dando origine a cinque triangoli non sovrapposti come nella figura. Basta che il progettista aggiunga opportunamente una retta nella vecchia figura qui a fianco e ottiene sette triangoli.



Progettista Farò quel che vuole il regista. Ma, aggiungendo due rette, posso ottenere molti più triangoli che non sono attraversati da alcuna retta: qual è il massimo numero di tali triangoli che si possono ottenere aggiungendo due rette nel disegno?

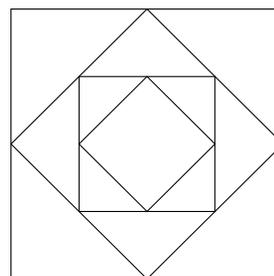
18. La cerimonia

Desdemona Pensavo che non ti fidassi di me.

Otello Forse, Iago mi continuava a ripetere che mi tradivi.

Ma poi ci siamo messi a risolvere problemi e ho capito che Iago non è una persona affidabile. Hai visto il pavimento della sala delle cerimonie? Ci sono disegnati quadrati in modo che ciascun quadrato abbia i vertici nei punti medi dei lati del quadrato immediatamente più grande. La superficie della sala (che è il quadrato massimo) misura 1600m^2 ; quanti cm misura il lato del quadrato più piccolo?

Desdemona e Otello si baciano.



19. Il fazzoletto perduto

Desdemona Otello, guarda questo cubo; è composto da 5 cubetti per lato. Rimuovi quei cubetti che hanno almeno tre facce che non sono a contatto con altri cubetti. (*Otello esegue la richiesta di Desdemona.*) Nel solido rimasto, rimuovi quei cubetti che hanno almeno tre facce che non sono a contatto con altri cubetti. (*Otello esegue anche questa richiesta di Desdemona.*) Quanti sono i cubetti rimasti? (*Otello bacia Desdemona e le restituisce il fazzoletto che aveva trovato.*)

20. Il provino

Aiuto Regista Ecco i 100 candidati per le parti di Otello, Iago e Cassio.

Regista Hai spiegato a ciascuno di loro che cosa deve fare.

Aiuto Regista Sì. Ho spiegato a tutti che li faremo girare in cerchio. Poi ho spiegato a quelli che sono qui per la parte di Otello che devono dire la verità. Ho spiegato a quelli che sono qui per la parte di Iago che devono dire il falso. Ho spiegato a quelli che sono qui per la parte di Cassio che devono dire il falso quando girano in senso antiorario, e che devono dire la verità quando girano in senso orario.

Regista Ottimo! (*Rivolto ai candidati*) Mettetevi in cerchio; iniziate a girare. (*I 100 candidati si muovono in cerchio.*) Dite una battuta coerente con il vostro personaggio.

Primo candidato Il mio nome è Otello.

Secondo candidato Il mio nome è Otello.

...

Centesimo candidato Il mio nome è Otello.

Regista Fermi! Tu, tu e tu: uscite dal cerchio. Mi andate bene per Otello. (*Rivolto ai candidati in cerchio*) Ricominciate a girare in senso opposto al precedente! (*Dopo che ciascuno dei 97 candidati si è girato di 180° , i candidati si muovono in cerchio.*) Dite una battuta coerente con il vostro personaggio.

Primo candidato Il mio nome è Cassio.

Secondo candidato Il mio nome è Cassio.

...

Novantasettesimo candidato Il mio nome è Cassio.

Regista Fermi! Tu, tu e tu: uscite dal cerchio. Mi andate bene per Iago. (*Rivolto ai candidati in cerchio*) Ricominciate a girare in senso opposto al precedente! (*Dopo che ciascuno dei 94 candidati si è girato di 180° , i candidati si muovono in cerchio.*) Dite una battuta coerente con il vostro personaggio.

Primo candidato Il mio nome è Iago.

Secondo candidato Il mio nome è Iago.

...

Novantaquattresimo candidato Il mio nome è Iago.

Regista Fermi! Tu, tu e tu: uscite dal cerchio. Mi andate bene per Cassio. (*Rivolto agli altri candidati rimasti in cerchio*) I candidati tra voi che si erano presentati per la parte di Cassio mi serviranno nelle scene di folla.

Aiuto Regista Ma quanti sono?

Fine

Soluzioni



Un grande ringraziamento va a coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i test di gara. Hanno anche una grossa parte nell'organizzazione e gestione della gara. Sono stati un aiuto fondamentale: Giulia Gaggero, Andrea Giusto, Bruk Mohamed, Cecilia Oliveri, Matteo Provendola, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso, Anna Ulivi.

Soluzione del problema 1. Ce ne sono $25 - 2 = 23$ di lato 1, $4 + 2 + 2 = 8$ di lato 2, 1 di lato 3.

La risposta è 0032.

Soluzione del problema 2. Le 2 frecce in più sono il $5\% = \frac{1}{20}$ delle frecce di ciascun archiere. Perciò le frecce sono $2 \cdot 2 \cdot 20 = 80$.

La risposta è 0080.

Soluzione del problema 3. I segni sono $25 + 28 + 15 = 68$. Del resto sono tanti quante le 36 persone, più quelle che sono state marcate con due segni, più due volte quelle che sono state marcate con tre segni, cioè $36 + d + 2 \cdot 5 = d + 46$ dove d indica le persone marcate con due segni. Si ricava che $d = 22$.

La risposta è 0009.

Soluzione del problema 4. Dato che $15 = 3 \cdot 5$ e 3 e 5 sono primi tra loro, i numeri divisibili per 3 e per 5 con le tre cifre richieste sono 22560, 25560, 28560, 20565, 23565, 26565, 29565.

La risposta è 0007.

Soluzione del problema 5. Un pacchetto cubico di lato 35 centimetri ha la diagonale massima di lunghezza $35\sqrt{3}$ cm ≈ 60.6218 cm.

La risposta è 6062.

Soluzione del problema 6. Dato che $1000000 = (2 \cdot 5)^6 = 2^6 \cdot 5^6$ e $2^6 = 64$ bisogna determinare le prime quattro cifre di $5^6 = 125^2 = 14400 + 1200 + 25 = 15625$.

La risposta è 1562.

Soluzione del problema 7. La somma dei puntini visti dai due giocatori è uguale alla somma dei puntini sulle facce laterali e del doppio dei puntini sulla faccia superiore. Perciò la faccia nascosta è $7 - \frac{(10 + 14) - 14}{2} = 2$.

La risposta è 0002.

Soluzione del problema 8. 40160000 ha un divisore 10 in meno rispetto a 401700000, ma è divisibile per 2. Perciò $\text{mcm}(40160000, 401700000) = 100000 \cdot \frac{4016}{2} \cdot 4017 = 806613600000$.

La risposta è 0012.

Soluzione del problema 9. Le cifre nella prima posizione di ora e mese sono necessariamente 0, 1 o 2. Nella prima posizione del giorno deve comparire 0, 1 o 2. Dunque nessuna di tali cifre può comparire nella seconda posizione del mese. Perciò l'ultimo mese dell'anno in cui si trova una scrittura come richiesto è settembre: 09. Il primo mese è marzo: 03. L'ultimo giorno possibile è 28 e si vede che si possono combinare le cifre rimaste per completare la richiesta: 17:56:43 28/09.

La risposta è 1756.

Soluzione del problema 10. Partendo dalla frazione più in basso costruendo la frazione finale si ottiene la sequenza

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{8}{13} \quad \frac{13}{21} \quad \frac{21}{34} \quad \frac{34}{55} \quad \frac{55}{89}$$

dove al numeratore compare un termine della successione di Fibonacci e al denominatore compare il termine successivo.

La risposta è 0144.

Soluzione del problema 11. Si considerino i quattro quadrati con un vertice nel punto in basso a sinistra. Per $1 \leq n \leq 4 = k$, sui lati del quadrato di lato n stanno i vertici di n quadrati. Nel riquadro ci sono $(5 - n) \cdot (5 - (n - 1)) = (5 - n) \cdot (6 - n)$ quadrati di lato n . Perciò i quadrati con vertici in punti del disegno sono

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k (n \cdot (5 - n) \cdot (6 - n)) &= \sum_{n=1}^k (30n - 11n^2 + n^3) \\ &= 30 \frac{k(k+1)}{2} - 11 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} \left(30 - 11 \frac{2k+1}{3} + \frac{k(k+1)}{2} \right) \\ &= 10(30 - 33 + 10) = 70. \end{aligned}$$

La risposta è 0070.

Soluzione del problema 12.

$$\begin{aligned} 2^{24} - 3^{12} = 4^{12} - 3^{12} &= (4^3 - 3^3)(4^3 + 3^3)(4^6 + 3^6) \\ &= (4^2 + 4 \cdot 3 + 3^2)(4 + 3)(4^2 - 4 \cdot 3 + 3^2)(4^2 + 3^2)(4^4 - 4^2 \cdot 3^2 + 3^4) \\ &= 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5^2 \cdot 193 \end{aligned}$$

La risposta è 0193.

Soluzione del problema 13. La figura è una delle “dimostrazioni senza parole” del teorema di Pitagora: si riconoscono otto copie di uno stesso triangolo rettangolo. Siano a e b le lunghezze dei suoi cateti. Il quadrato grande ha lato $a + b$, il quadrato piccolo ha lato $a - b$. Il quadrato obliquo ha lato l’ipotenusa del triangolo rettangolo: l’area è $a^2 + b^2$. Dato che $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$, basta calcolare $\frac{8600 + 6300}{2} = 7450 \text{ mm}^2$.

La risposta è 7450.

Soluzione del problema 14. Cassio non sa il numero perché ne vede almeno uno con il numero 20. Perciò, se il cappello di Iago fosse numerato 10, Roderigo capirebbe che il suo ha numero 20. Dunque il cappello di Iago ha numero 20. Le disposizioni possibili sono

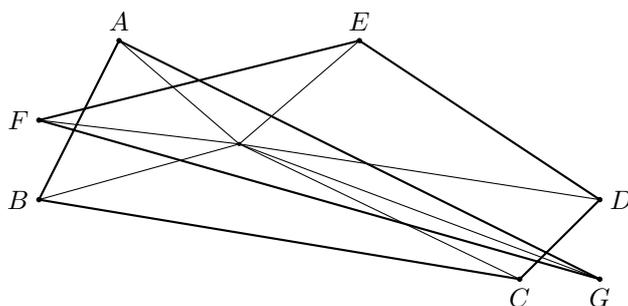
Cassio	Roderigo	Iago
20	20	20
20	10	20
10	20	20
10	10	20

La risposta è 0080.

Soluzione del problema 15. L’ampiezza 120° è necessariamente dell’angolo ottuso, perciò 70° è necessariamente l’ampiezza di un angolo del triangolo acutangolo. A questo punto 20° non può essere l’ampiezza di un angolo del triangolo acutangolo perché il terzo angolo dovrebbe essere di 90° . Dunque 45° è l’ampiezza di un altro angolo nel triangolo acutangolo. Il terzo angolo nel triangolo acutangolo ha ampiezza $180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$ mentre l’ampiezza del terzo angolo nel triangolo ottusangolo è $180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$.

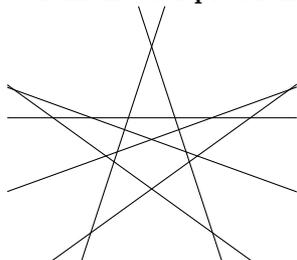
La risposta è 0065.

Soluzione del problema 16. Si fissa un punto all’interno del poligono e lo si congiunge con ogni vertice. Si formano 7 triangoli e la somma richiesta consiste di 7 angoli piatti a cui vanno tolti $2 \cdot 2 = 4$ angoli piatti.



La risposta è 0540.

Soluzione del problema 17.



La risposta è 0011.

Soluzione del problema 18. Ciascun quadrato grande ha area che è la metà di quello sui punti medi del quale è costruito. L'area del quadrato più piccolo è $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ del quadrato più grande. Dunque il lato è

$$\sqrt{\frac{1600}{8}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.14$$

La risposta è 1414.

Soluzione del problema 19. I cubetti con tre sole facce a contatto con altri sono quelli di vertice. Nel cubo originale sono 8; nel solido ottenuto con la prima rimozione, i vertici sono triplicati: 24. Perciò la risposta è $5^3 - 4 \cdot 8 = 125 - 32 = 93$.

La risposta è 0093.

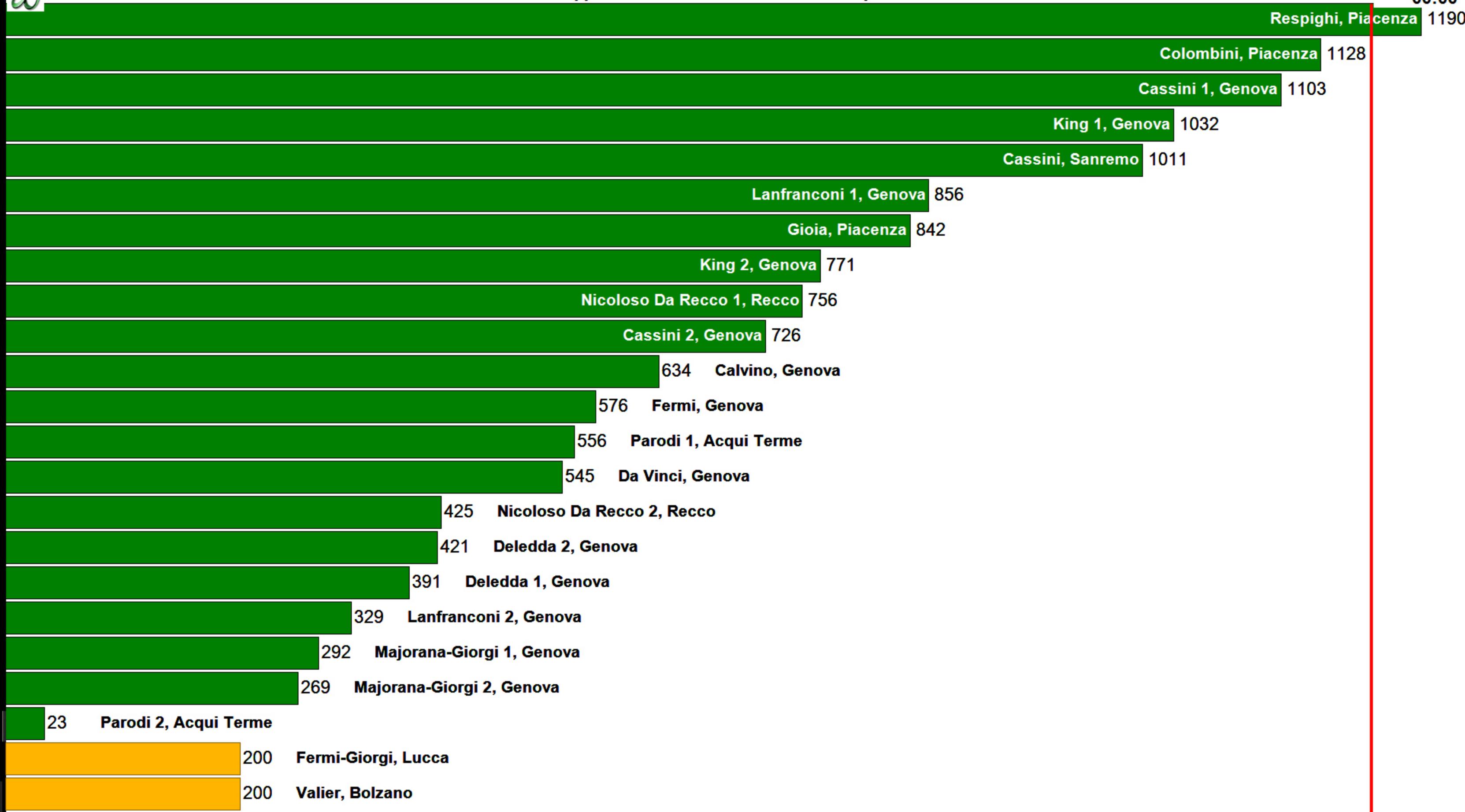
Soluzione del problema 20. Il verso della prima rotazione è antiorario perché, se questa fosse in verso orario, allora i candidati per il personaggio di Cassio dovrebbero dire il vero, ma ciò non fanno in quanto tutti pronunciano la frase "Il mio nome è Otello". Dato che almeno tre candidati per la parte di Cassio sono nel cerchio iniziale e i versi possibili di rotazione sono due, la prima rotazione avviene in verso antiorario. Quindi ciascuno dei candidati per la parte di Otello dice il vero, un candidato per la parte di Iago o uno per la parte di Cassio mente. Al giro successivo, in verso orario, i candidati per la parte di Cassio dicono il vero. Ma la frase pronunciata dai candidati "Il mio nome è Cassio"; dunque non vi sono candidati per la parte di Otello all'interno del gruppo (perché questi mentirebbero): sono rimasti perciò soltanto candidati per le parti di Iago e Cassio. All'ultimo rotazione, nuovamente in verso antiorario, i candidati per la parte di Cassio mentono: la frase pronunciata è "Il mio nome è Iago"; perciò nel gruppo non vi sono candidati per la parte di Iago perché uno tale direbbe il vero. Dunque al termine della prima prova vengono estratti dal gruppo gli unici tre candidati per la parte di Otello; al termine della seconda gli unici tre candidati per la parte di Iago; al termine della terza tre dei rimanenti candidati, che sono necessariamente tutti per la parte di Cassio. Dunque il numero di candidati per la parte di Cassio tra i candidati rimasti è $100 - 3 - 3 - 3 = 91$.

La risposta è 0091.



Coppa Euclide 2019 - Classifica finale squadre

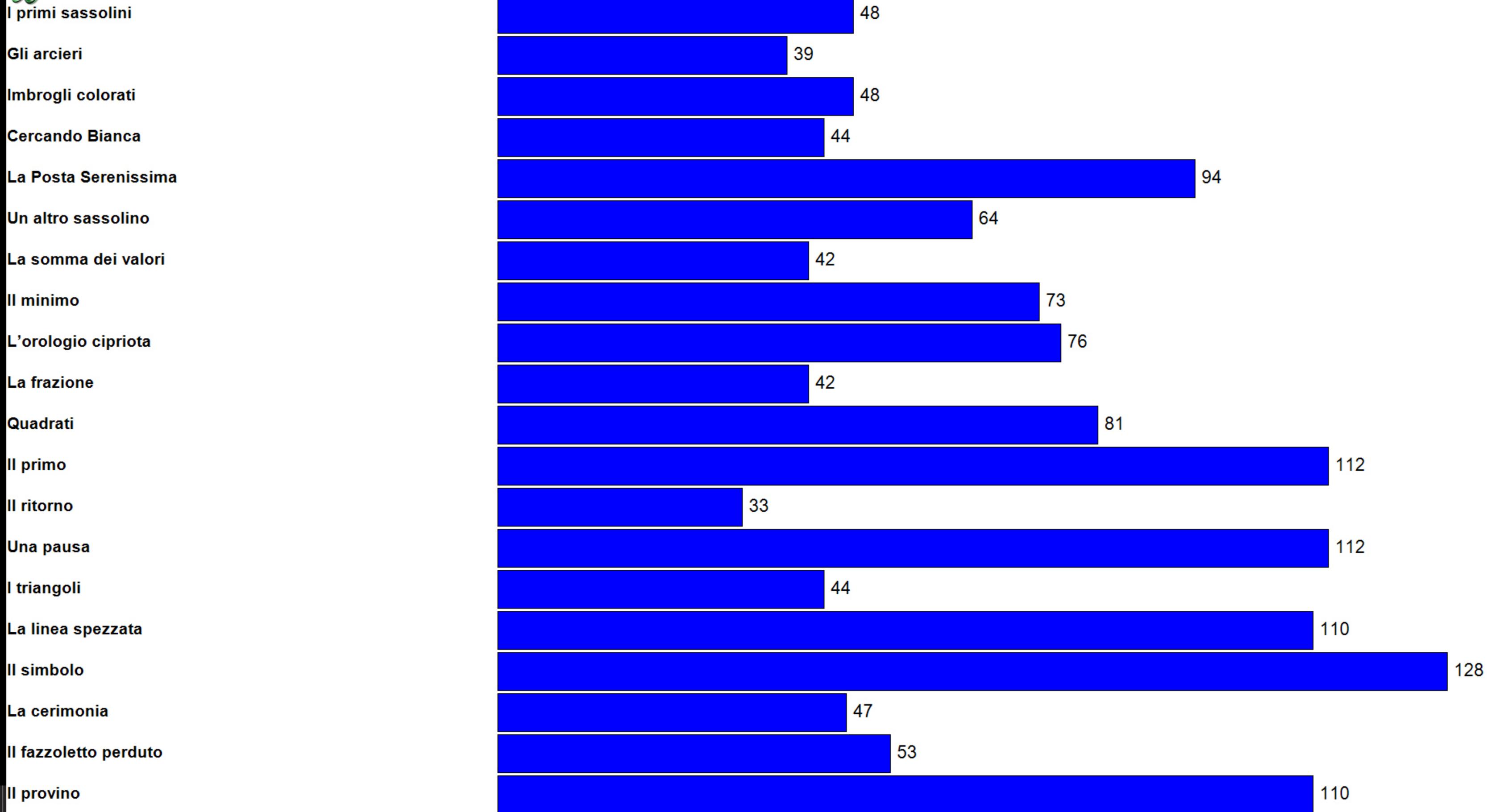
00:00





Coppa Euclide 2019 - Classifica domande

00:00





Coppa Euclide 2019 - Stato squadre

00:00

01) Lanfranconi 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
02) Gioia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
03) Colombini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
04) King 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
05) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
06) Nicoloso Da Recco 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
07) Cassini 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
08) Parodi 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
09) Calvino	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10) Cassini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11) Deledda 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
12) Majorana-Giorgi 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
13) Da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
14) Respighi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
15) Fermi-Giorgi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
16) Valier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
17) Nicoloso Da Recco 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
18) Cassini 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
19) Majorana-Giorgi 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20) Parodi 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21) King 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
22) Lanfranconi 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23) Deledda 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20