XXI Gara Nazionale a Squadre

Unione Matematica Italiana — Ministero dell'Istruzione

Semifinale A – 1 Settembre 2020

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Pattinatori paralleli

Quest'anno fa più freddo del solito; l'inverno è arrivato presto! In città c'è anche una pista di pattinaggio a forma di triangolo ABC; sei punti $T_1, T_2, \dots, T_6$ (in quest'ordine) dividono il lato BC in sette segmenti di uguale lunghezza. Alberto parte dal punto T_3, e pattina parallelamente ad AB fino ad arrivare a un punto P sul segmento AT_4. Barbara parte dal punto T_6, e pattina parallelamente ad AB fino ad arrivare a un punto Q sul segmento AC. Qual è il rapporto tra le distanze che hanno percorso? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

2. La somma delle somme

Il piccolo Alberto conta i giorni che mancano a Natale. Per ogni possibile sequenza di tre numeri, anche uguali tra loro, appartenenti all'insieme $\{0,1,2,3\}$, Alberto scrive la loro somma su un foglio. Poi fa la somma di tutti i numeri scritti. Quanto vale questa somma?

3. Sfida all'ultima palla

Alberto e Barbara si sfidano a una gara di palle di neve. La gara è composta di *round* successivi, e vince il primo che arriva a tre vittorie. Barbara è più brava, e ha probabilità doppia rispetto ad Alberto di vincere ogni round (non è possibile che un round si concluda in pareggio). Alberto ha sei cioccolatini, due al latte e quattro fondenti; per scaldarsi mangia un cioccolatino all'inizio di ogni round dispari (il primo, il terzo, ...). Qual è la probabilità che al termine della sfida Alberto non abbia più cioccolatini al latte? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

4. Per combattere il freddo

Barbara si prepara una cioccolata calda, e dev'essere *bollente*! La sua temperatura (in gradi Freddenheit) è il più piccolo numero di quattro cifre $\mathtt{ABCD}$ (con la cifra $\mathtt{A} \neq 0$) tale che $\mathtt{MCD}(\mathtt{1ABCD}, \mathtt{ABCD}+1) = p > 100$ e $\mathtt{MCD}(\mathtt{ABCD}, \mathtt{A}+\mathtt{B}+\mathtt{C}+\mathtt{D}) = q < 100$, con p e q numeri primi. Quanto vale?

5. Neve esponenziale

Si prevede che a capodanno (giorno 1) cadranno $x_1 = 3$ centimetri di neve, e poi in ogni giorno n successivo x_n centimetri, dove $x_{n+1} = \sqrt[n/2]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ per ogni n. Quanti centimetri di neve cadranno nel giorno 2020?

6. Tartaglia distratto [$\star\star$]

Quando la maestra ha spiegato il triangolo di Tartaglia, Alberto stava guardando la neve fuori dalla finestra e si è distratto. Ora deve disegnarlo, e sbagliandosi scrive come primo e ultimo numero di ogni riga non tutti uni, ma numeri dispari successivi. Poi riempie il resto con la solita regola ricorsiva: l'n-esimo numero su ogni riga è la somma dell'$n-1$-esimo e dell'n-esimo sulla riga precedente. Quindi per lui le prime righe sono 1, poi 3,3, poi 5,6,5, poi 7,11,11,7. Quanti numeri non multipli di 3 scriverà nelle prime 241 righe?

7. Un mercatino affollato

Il mercatino di Natale che Alberto e Barbara stanno visitando ha una capienza massima di 3030 visitatori, ed è composto di 2020 bancarelle disposte in fila. Davanti a ogni bancarella c'è almeno un visitatore. Qual è il massimo K per cui è sempre possibile trovare una sequenza di bancarelle consecutive che hanno in totale esattamente K visitatori?

8. Cristalli armoniosi

Come si sa, i fiocchi di neve hanno affascinanti forme geometriche. Quello che sta osservando Barbara è un esagono regolare $ABCDEF$. Un punto P al suo interno è tale che le aree dei triangoli ABP, BCP e CDP sono rispettivamente 23, 28 e 40. Qual è l'area totale del fiocco di neve?

9. Cono rotolante [⋆⋆]

Da una grotta si è staccata una stalattite che ha la forma di un cono retto con altezza 12 e raggio di base 5. È ora appoggiata di lato sul pavimento, e rotola compiendo una rotazione completa attorno al punto, fisso, in cui il vertice tocca il pavimento. Tutta l'aria spazzata dalla stalattite ghiaccia formando un blocco solido. Qual è il volume del blocco?

10. In tre attorno al falò [⋆]

Alberto, Barbara e Ciro sono seduti intorno al fuoco, disposti rispettivamente ai vertici A, B, C di un triangolo. Il fuoco sta nell'incentro I. Un punto del triangolo è considerato vicino ad Alberto se per raggiungerlo egli non deve oltrepassare la retta passante per I e perpendicolare ad AI; e similmente vicino a Barbara (o a Ciro) se per raggiungerlo ella (o egli) non deve oltrepassare la retta passante per I e perpendicolare a BI (o CI). Sapendo che il triangolo ABC ha i lati lunghi $3, 4, 5$, qual è l'area dell'insieme dei punti interni al triangolo che sono vicini a due o più persone? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

11. Legna da ardere

Ogni giorno il papà di Barbara mette nel caminetto un certo numero di ciocchi di legna; per la precisione, il giorno n-esimo ne mette tanti quanti i modi distinti in cui si può scrivere n come somma di potenze di 2 non ordinate. Per esempio, il quarto giorno ne mette 4 (difatti i modi sono $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$, 4), e il 61esimo giorno ne mette 1460. Quanti ciocchi di legna consumerà in totale nei primi 30 giorni?

12. Chi è più goloso

La torta di mele che Alberto ha preparato ha la forma di un rettangolo $ABCD$. Prende due punti E ed F sul lato AB (in modo che A, E, F, B siano in quest'ordine), e la divide in quattro parti tagliando lungo i segmenti CE e DF. Alberto tiene per sé la parte contenente il segmento EF, che ha area 200. Dà ai suoi genitori la parte contenente CD, che ha area 450, e la parte contenente A, che ha area 441. Alla sorella Barbara rimane la parte contenente B; qual è la sua area?

13. Il salto del cavallo [⋆]

Chiusa in casa nelle lunghe sere innevate, Barbara gioca a scacchi 3D con il nonno. Sulla loro scacchiera $8 \times 8 \times 8$, un cavallo si muove spostandosi di due caselle in una qualunque delle sei direzioni, e poi di una casella in una direzione perpendicolare. Scegliendo a caso due caselle distinte sulla scacchiera, qual è la probabilità che un cavallo *non* possa saltare da una all'altra con una singola mossa? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

14. Polinomio particolare

Nella sua letterina, Alberto ha chiesto a Babbo Natale di portargli un polinomio $p(x, y)$ in cui tutti i termini hanno grado (complessivo) 2, e inoltre per ogni a, b si ha $p(a, b) = p(-b, a-b)$. Babbo Natale corruga un po' le sopracciglia a questa strana richiesta, ma alla fine i suoi elfi riescono a fabbricare un polinomio diverso da quello nullo che soddisfa le richieste. Quanto vale $p(2, 4)/p(3, -3)$? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

15. Distanze astronomiche

Quanta distanza percorre Babbo Natale con la sua slitta, per consegnare i regali a tutti i bambini del mondo? Esattamente $(8!)!$ chilometri, il fattoriale di otto fattoriale. Quando questo numero viene scritto in base 75600, con quanti zeri termina?

16. Olimpiadi invernali [⋆]

Dopo una giornata sulla neve, Alberto si è messo in pigiama e sta leggendo sotto le coperte un libro di problemi di matematica per prepararsi al Winter Camp. Si è bloccato su questo: a_i e b_i sono due successioni infinite di reali tali che $a_0 > 0$, tali che $a_{n+1} + b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ e $a_{n+1}b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ per $n \geq 0$; inoltre $b_{2020} = 1$. Trovare la somma dei possibili valori di a_0.

XXI Gara Nazionale a Squadre

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Ministero dell'Istruzione

Semifinale A – Soluzioni – 1 Settembre 2020

Nr.	Problema	Soluzione
1	Pattinatori paralleli	0011
2	La somma delle somme	0288
3	Sfida all'ultima palla	0448
4	Per combattere il freddo	1716
5	Neve esponenziale	4401
6	Tartaglia distratto [⋆⋆]	7291
7	Un mercatino affollato	2020
8	Cristalli armoniosi	0210
9	Cono rotolante [⋆⋆]	3267
10	In tre attorno al falò [⋆]	0017
11	Legna da ardere	1459
12	Chi è più goloso	0409
13	Il salto del cavallo [⋆]	0575
14	Polinomio particolare	0013
15	Distanze astronomiche	5038
16	Olimpiadi invernali [⋆]	8576

Semifinale A (01/09/2020)

#	Squadra	Punti	D.1 34	D.2 26	D.3 47	D.4 49	D.5 51	D.6 94	D.7 76	D.8 67	D.9 94	D.10 52	D.11 92	D.12 45	D.13 86	D.14 59	D.15 46	D.16 92
1	Galilei [Civitavecchia]	1028	34	26	47	53	41		71	87		114 J	102	46		79	66	102
2	Magrini-Marchetti [Gemona Del Friuli]	856	42	26	124 J		59		86		102			65	94	62	36	
3	Copernico [Brescia]	812	44	18	41		55			82	109	58	-20	45	164 J		56	
4	Fermi [Padova]	719	34	31	53	40	51		96		228 J		-20	45	-10	51	-40	
5	Volta [Foggia]	693	44	26	-20	52	51		79				214 J	35			52	
6	Cattaneo [Torino]	693	37	-1	67	47	21	-10	72		-10		-10	41	182 J	59	38	
7	Galilei [Trento]	678	34	46	49	54	57				-20	62			192 J		44	
8	Taramelli-Foscolo [Pavia]	677	49	34	47	-10	-20			67		54	90	47		59	100 J	
9	Marinelli [Udine]	661	26	16	37	55	56				-10	144 J		49		67	61	
10	Marzoli [Palazzolo sull'Oglio]	634	40	30	48	-10	41				168 J	56	-10			65	46	
11	Galilei [Verona]	571	34	16	-30	41	61		-10		-20		224 J			59	36	
12	Righi [Cesena]	549	34	16	-10	39	44		80			55	-20 J	45		60	46	
13	Primo Levi [San Donato Milanese]	523	34	31	37				74				-30	45	172 J			
14	Umberto Di Savoia [Catania]	516	68 J	26	40	-20			-20	75	-10		-10			59	41	107
15	Fermi [Cantù]	508	35	16	52	138 J	41			-10	-10	-10		60			36	
16	Righi [Roma]	496	38	36	-20	64	21	-40	91	63	-40 J		-10	38	-10	69	36	
17	Pascal [Reggio Emilia]	483	39	26				104								108 J	46	
18	Marconi [Conegliano]	446	24	32	-10		66	-40			-20			35	162 J		37	
19	Marconi [Foggia]	374	34	6		-10	71		-10		-30			45		118 J	-10	
20	S. Cannizzaro [Palermo]	373	-10	26	37		-10					134 J	-10				46	
21	Lussana [Bergamo]	327	24	26	55		53	J			-10		-10		-20		49	
22	Castelnuovo [Firenze]	273	34	26	-20	-10					-20 J	60			-20	63		
23	Don Milani [Montichiari]	262	-10	16	47						-10		-20	53	J		26	
24	Nomentano [Roma]	257	34	6	17				-10	-20				80 J			-10	
25	Cassini [Genova]	232	34	26	-10	-30	42		-10	-20	-20		-10	-10		74	46	-40 J
26	Sannazaro [Napoli]	166		26									-20 J					
27	Scacchi [Bari]	161	24	27	-10	-10		-20			-10		J					

Semifinale B (01/09/2020)

#	Scuola	Tot.	D.1 27	D.2 27	D.3 43	D.4 58	D.5 43	D.6 92	D.7 77	D.8 79	D.9 73	D.10 52	D.11 96	D.12 38	D.13 92	D.14 43	D.15 59	D.16 90
1	Marconi [Carrara]	1101	35	35	35	68	49	102	85	89	78	120 J		38	102	58	57	-10
2	Jacopo da Ponte [Bassano del Grappa]	1080	27	47		64	43		97	94	69	144 J	89	48	82	47	69	
3	Copernico [Prato]	997	27	17	102 J	56	53	-10		85	93	56		38	100	48	62	110
4	Leonardo [Brescia]	730	47	8	58	68	63	-10	92		-20	-20		38	97	106 J	43	
5	Galilei-Moro [Manfredonia]	651	33	17	39	51	23		83		-20	52	-20	28		126 J	79	
6	Da Vinci [Milano]	625	34 J	17	43	59	58					67	111	40		46	-10	
7	Leonardo da Vinci [Firenze]	601	27	7	43		-10				71	94 J	106	42			61	
8	Sobrero [Casale Monferrato]	587	27	29			43		82			52	204 J	-10				
9	De Giorgi [Lecce]	538	31	-20	43		-10					58	180 J	41	-10		65	
10	Copernico [Udine]	533	42	27	23	-20	51		-20	-10		124 J		58		49	49	
11	Tron-Zanella [Schio]	519	27	17	-10	40	47		-10	154 J				-10		44	60	
12	Donatelli [Terni]	514	28	30	-20	63	43	-10		74	146 J							
13	Rosmini [Rovereto]	500	37	42	53	-10	46		-10			45	J	43		35	59	
14	Gullace [Roma]	442	27	32	-20		45		-20	83				92 J		43		
15	Pacinotti [La Spezia]	429	27	37	37				87				101		J		-20	
16	Fermi [Modena]	406	29	17		-10	48				-10	54		-10			128 J	
17	Corso [Correggio]	378	27	17	-10						-60 J		116	38		51	39	
18	Peano-Pellico [Cuneo]	356		27	48		44				-40 J	43					74	
19	Respighi [Piacenza]	339	32	31	63	63		J					-10					
20	Galilei [Pescara]	321	27	33	46	52			-30				-10			43		J
21	Malignani [Udine]	294	30	7	-10	-10	-10			-10		-10		88 J			59	
22	Leopardi [Recanati]	251	17	17	33				-10		-40 J		104				-30	
23	Fermi [Cosenza]	224	17	-33	-10	-10	-20	-20 J	-20	89	-10	52	-10	39				
24	Paschini [Tolmezzo]	180	27	27			43			-30	-10		-10	53			-80 J	
25	Rambaldi-Valeriani [Imola]	167	27	27	-30						-40 J		-10			43	-10	
26	Fermi [Nuoro]	147		17								-20 J		-10				
27	Frisi [Monza]	99		7	24		-10		-20		-20		-20	28	-40 J		-10	

Semifinale C (01/09/2020)

			D.1 28	D.2 30	D.3 51	D.4 64	D.5 29	D.6 92	D.7 59	D.8 82	D.9 90	D.10 67	D.11 91	D.12 50	D.13 92	D.14 55	D.15 48	D.16 90
1	Calini [Brescia]	976	28	45	66	45	29		74		105	154 J	-10	65	107	70	38	
2	Dini [Pisa]	919	28	30	71	66		-20	65	-10	110			52	156 J	63	38	110
3	Tassoni [Modena]	838	38	30	61	64	29			88	90	174 J		53			51	
4	Spano [Sassari]	787	18	20		69	49			87	-10	75	66	35		150 J	68	
5	Majorana [Desio]	750	48	32	54		20	224 J					99	50			63	
6	Majorana [Brindisi]	689	8	30	56		27		41	90	-10		91	140 J		56		
7	Quadri [Vicenza]	655	43	30	57		35		49					58	184 J		39	
8	Marconi [Foligno]	655	18	50	31	58	29		54	97	-10					120 J	48	
9	Galilei [Perugia]	595	28	30	52	59	33	107	62		-10		-20			-10	104 J	
10	Scarpa [Motta di Livenza]	577	32	20			31	-10	57		-10		212 J	50		55	-20	
11	Romita [Campobasso]	565	-20	36	51	84	32	82	-20		-10	-10		-10	200 J		-10	
12	Amedeo di Savoia [Pistoia]	537	28	20	53		-10		-20	102	-10	164 J		50				
13	Gramsci [Firenze]	534	28	30	55	72			-10		-10		97				112 J	
14	Galilei [Ancona]	515	34	38	41		-10				-10		222 J	40				
15	Lorenzini [Pescia]	485	33	30			29							120 J		65	48	
16	Grassi [Lecco]	480	36	30	-10						-20	-10	190 J	54			50	
17	Da Vinci [Arzignano]	460	31	35	-10	67			-10		176 J	-10		41	-10		-10	
18	Marini-Gioia [Amalfi]	459	18	20	-20				79		-20		-10	-10	204 J		38	
19	Alfano da Termoli [Termoli]	402	28	30	-10	70	29	-20	53		-20				-10	58	54	-20 J
20	Mattioli [Vasto]	296	28	34	41	74	9		-20				-10				-20	J
21	Corni [Modena]	284	28	-20		-10	44			82				-20	-80 J	57	53	-10
22	Leonardo da Vinci [Trento]	267	28	31	59		9	-20 J	60	-10	-20						-30	
23	Mamiani [Roma]	251	28	20	-10	-10	34	J					-10			39		
24	Bassa Friulana [Cervignano]	222	18	33		-10		J					-20		-20	61		
25	Vercelli [Asti]	196	56 J	30	-20								-10				-20	
26	Berard [Aosta]	196	30	20							-60 J			46				
27	Battaglini [Taranto]	128	19	40	-10		19				-100 J							

Semifinale D (01/09/2020)

			D.1 34	D.2 27	D.3 40	D.4 53	D.5 55	D.6 73	D.7 72	D.8 39	D.9 96	D.10 50	D.11 75	D.12 36	D.13 73	D.14 42	D.15 54	D.16 90
1	Volta [Milano]	926	44	47	55	23	65	162 J	78	45	-20	56		51	64	62	44	-10
2	Ferraris [Torino]	912	24	23	35	56	75	156 J	87	54	-20	55	-10	46	45	52	74	
3	Nievo [Padova]	799	34	27	40				72	43	116	140 J			71	42	54	
4	Mascheroni [Bergamo]	795	54	22	38	49	60	83		-10		53		36	158 J	48	44	
5	Golgi [Breno]	755	34	27	50	51	-20		75	59	-10	58	-10	112 J	78	37	54	
6	Leopardi-Majorana [Pordenone]	718	34	25	60	45	55			47			83	26	83		100 J	
7	Chilesotti [Thiene]	707		17		73	-10	79	67		-10		90		186 J		55	
8	Galilei [Catania]	695	40	32	30	54	60					-10	85	34	156 J		54	
9	Agnesi [Merate]	678	35	30	20	-10	45	186 J	92	-10	96	54			-20			
10	Alessi [Perugia]	621	49	37	-30	106 J	58		64	44			-10	36		50	57	
11	Convitto Nazionale Emanuele II [Roma]	575	34	19	20	68	-10		-20	-10			79	40		57	138 J	
12	Principe di Napoli [Assisi]	511	37	27	30	33							162 J				62	
13	Antonietti [Iseo]	492	-20	7	46	58	61				-10	110 J		36		44		
14	Mercalli [Napoli]	453	48 J	27	-20				76	49	111		-20	42			-20	
15	Pacinotti [Cagliari]	435	34	27		53	56				-80 J		78	41	66			
16	Banzi Bazoli [Lecce]	425	34	27	30	-10	63				-20	100 J	-10	27	-30		54	
17	Gobetti [Torino]	419	39	17					-10		-20		190 J			43		
18	Da Vinci [Treviso]	403	36	28	60 J	47			-40	-10	-10	-10		38		45	59	
19	Torricelli-Ballardini [Faenza]	399	34	-40	43			156 J			-10						56	
20	Fanti [Carpi]	396	34	7	34	-20			-10		-10		77		134 J		-10	
21	Masci [Chieti]	332	34	27			49				-30		132 J	-10			-30	
22	Cairoli [Vigevano]	301	34	27										52 J	-20		48	
23	Pascal-Mazzolari [Manerbio]	271	34	31				-40 J			-10		80	36			-20	
24	Paleocapa [Rovigo]	267	42	7	21		57				-20				J			
25	Volterra [Ciampino]	230	38	27	-10	-10					-10		-20 J	39		46	-30	
26	Il Pontormo [Empoli]	193	34	7	32		-10	-10	70		-10		-80 J					
27	Saffo [Roseto degli Abruzzi]	97		17	-30				-20 J		-10	-10					-10	
28	Fermi [Alghero]	60		-40					-30		-20 J				-10			

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
III FINALE NAZIONALE
(22 settembre 2020)

FROZEN II
IL SEGRETO DI ARENDELLE

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale *x* è il più grande intero minore od uguale ad *x*.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2}=1,4142 \qquad \sqrt{3}=1,7321 \qquad \sqrt{5}=2,2361 \qquad \pi=3,1416$$

1. IL GIOCO DELLA FORESTA INCANTATA
Sotto gli occhi di Re Agnarr di Arendelle, le piccole figlie Anna ed Elsa stanno giocando all'interno di una foresta di ghiaccio creata dalla magia di Elsa. "L'esercito del *Folletto di Neve* sta attaccando" - racconta Anna. Elsa risponde con: "Ma ecco che la *Principessa delle Fate* attacca con una sequenza di palle di neve tirandole con una o due mani: $1-2-1-2-2-1-2-2-2-1-2-2-2-2...$ e dopo 2020 colpi il *Folletto di Neve* è battuto". "A letto… bambine" ordina re Agnarr. "Ma quante palle di neve sono servite?" chiede Anna. (N.B. una sequenza del tipo $1-2-1$ è da considerare come 3 colpi.)

2. LA STORIA DELLA FORESTA INCANTATA
"Ve la racconto io una storia su una foresta incantata" comincia Re Agnarr. "Quando ero giovane accompagnai mio padre Re Runeard nelle foreste a nord per incontrare la tribù dei Northuldri." Anna ed Elsa ascoltano con grande attenzione sotto lo sguardo amorevole della Regina Idulna. "Vostro nonno costruì un'enorme diga per trattenere le acque del nord per aiutare i Northuldri. Per realizzarla riuscì a fare un calcolo molto complesso. Considerate un triangolo equilatero ABC e P un punto appartenente all'arco AB della circonferenza ad esso circoscritta che non contiene C. Se Q è il punto di intersezione tra AB e PC, Re Runeard calcolò la misura di PQ, sapendo solamente che $AP=700$ m e $PB=300$ m." Voi sapreste dire quanto misura PQ in metri?

3. L'INCIDENTE
Il racconto continua: "Gli abitanti del Nord traevano vantaggio dagli spiriti di Acqua, Terra, Fuoco e Aria che abitavano la foresta. Fu uno di loro a distrarmi quando accadde qualcosa di brutto. Fummo attaccati e vostro nonno fu ucciso. Lo scontro fece adirare gli spiriti che scagliarono la loro rabbia contro di noi. Io persi i sensi fino a quando udii una voce che rispose ad un quesito: se $\frac{x}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z}{11}=\frac{k}{13}>0$ e $xyzk=6.486.480$, quanto vale $x+y+z+k$? Non so né chi pose la domanda né chi vi rispose… ma so che mi ritrovai, unico superstite, dall'altra parte di una nebbia impenetrabile che ammantava tutta la foresta. Quale fu la risposta del quesito… beh lo calcolerete domani. Adesso a nanna!"

4. AHTOHALLAN
Anna chiede alla mamma del perché i Northuldri abbiano attaccato chi li stava aiutando... e cosa succederà se gli spiriti un giorno dovessero risvegliarsi. La regina Idulna, mettendo a letto le figlie, canta loro di un posto chiamato Ahtohallan, dove è conservata la memoria del passato e di quello che accadrà in futuro. Anna si addormenta subito e per far prendere sonno ad Elsa la regina le chiede di calcolare il valore di n per cui $\frac{a_0+a_2}{a_1}+\frac{a_3+a_5}{a_4}+...+\frac{a_{n-2}+a_n}{a_{n-1}}=2020$ dove a_0, a_1, $\dots$, a_n è una progressione aritmetica. Quale numero calcola Elsa prima di addormentarsi tra le braccia della mamma?

Qualche anno più tardi…

5. UN PAESE FELICE
Sono passati tre anni dall'incoronazione di Elsa come regina e la vita ad Arendelle scorre felice da allora. Sotto il regno della nuova regina tutto procede a meraviglia, tanto che Olaf, il pupazzo di neve nato dalla magia di Elsa, è solito trascorrere il suo tempo libero a prendere il sole sui prati. Oggi, mentre sta guardando il cielo, vede le nuvole che formano dei triangoli ottusangoli... e si chiede: quanti triangoli ottusangoli esistono che abbiano due lati di lunghezza 17, 23 e anche il terzo lato di lunghezza intera?

6. LA VOCE
Una notte, Elsa ode un suono melodioso che la chiama, lo segue e così risveglia involontariamente gli spiriti dei quattro elementi, che tolgono ad Arendelle l'acqua, il fuoco, la sottopongono ad un terremoto e a fortissime raffiche di vento. Gli abitanti, preoccupati, sono costretti a scappare dalla città. Per proteggere tutti durante l'evacuazione Elsa calcola il più grande valore intero che può assumere $\frac{x-y}{z-k}$ con il vincolo $10<x<z<y<k<1000$. Che numero permette ad Elsa di salvare tutto il suo popolo?

7. LA VISITA DI GRANPAPÀ
I troll guidati da Granpapà raggiungono Elsa ed il popolo di Arendelle. Granpapà chiede ad Elsa di risolvere un problema: una sequenza finita di 0 e 1 (che inizi con 1) rappresenta un numero espresso in una qualunque base $b\ge 2$, $b\in\mathbb{N}$ (ad esempio 1001000 se interpretato come numero in base due rappresenta 72, in base dieci rappresenta proprio $1.001.000$). Per quale sequenza di 0 e 1 la somma dei numeri che essa rappresenta nelle basi da due fino a dieci è pari a 3087? Appena Elsa risponde con la soluzione Granpapà le comunica che gli spiriti che ha risvegliato sono molto arrabbiati e che l'unico modo per placarli è quello di scoprire la verità sul passato. (Dare come risposta le quattro cifre meno significative della sequenza trovata).

8. IN VIAGGIO VERSO NORD
Elsa, Anna, Olaf, Kristoff e Sven si incamminano così verso la foresta incantata per scoprire la verità sul passato del regno. Olaf, annoiato dal lungo viaggio, comincia ad elencare tutte le quaterne ordinate (a,b,c,d) di numeri interi non negativi tali che $10\le a+b+c+d\le 20$. Anna chiede ad Elsa quante ne dovrà sentire e non rimane certo molto contenta quando Elsa le rivela quante sono. Che numero ha calcolato Elsa?

9. LA GRANDE NEBBIA
Dopo alcuni giorni di viaggio Elsa, Anna, Olaf, Kristoff e Sven giungono davanti ad un muro di nebbia che si estende a perdita d'occhio. Kristoff ed Olaf cercano di entrarci ma una forza sconosciuta li respinge continuamente. Elsa, avvicinandosi, sente una voce cantare: "Un numero di tre cifre è detto *mediano* se una qualsiasi delle sue cifre è la media aritmetica delle altre due. (Ad esempio 264 è *mediano* in quanto 4 è la media aritmetica di 2 e 6.) Quanti numeri *mediani* di tre cifre esistono?" Elsa dopo un attimo di riflessione risponde cantando la soluzione. La nebbia per un attimo si dirada permettendo a tutti di attraversarla, quindi si richiude su sé stessa. Che numero ha cantato Elsa?

10. LO SPIRITO DELL'ARIA
Superata la nebbia Elsa ed Anna si ritrovano in una foresta magnifica. Dapprima un leggero venticello, quindi un forte vento ed infine un tornado si scatena nella radura sollevando da terra prima Olaf, quindi Anna, Kristoff e Sven. Elsa cerca di resistere all'infuriare del vento creando due getti di ghiaccio dalle sue mani. Si ricorda che per ottenere il massimo dalla sua magia deve calcolare le ultime quattro cifre di $p(10)$, dove $p(x)$ è un polinomio monico di nono grado tale che $p(1)=1$, $p(2)=2$, ..., $p(9)=9$. Elsa, pur sotto pressione, riesce a completare il calcolo e così tutta l'acqua trasportata dal vento ghiaccia facendo svanire il forte vento. Qual è il valore che Elsa ha calcolato?

11. LE STATUE DI GHIACCIO
Nella radura l'acqua ghiacciando ha lasciato delle tracce del passato sotto forma di statue. C'è la figura di un alce nel punto A, di un cavallo nel punto C e di un fuoco da campo nel punto F. In un punto S, interno al triangolo equilatero ACF c'è una coppia di figure abbracciate. Elsa ed Anna riconoscono immediatamente il padre e rimangono sorprese nel distinguere nella figura femminile la madre Idulna. Olaf osserva che proiettando S sui lati AC, AF e CF e chiamando i punti rispettivamente Y, Z e W, vale $SY:SZ:SW=1:2:4$. Mentre Anna si sta ancora interrogando sul significato della statua, Olaf si chiede: "Chissà quanto vale il rapporto tra l'area di $AZSY$ e l'area del triangolo AFC?" (Dai come risultato la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

12. LO SPIRITO DEL FUOCO

Dal folto della foresta ecco improvvisamente apparire prima una strana popolazione vestita con abiti di lana cotta, quindi alcuni armigeri ricoperti di armature scintillanti. Elsa li blocca tutti facendo ghiacciare il terreno. Gli armigeri si presentano come rappresentanti di Arendelle, rimasti bloccati dalla nebbia, la popolazione si presenta come i Northuldri. Non c'è nemmeno il tempo per le spiegazioni che improvvisamente gli alberi della radura prendono fuoco e tutti rimangono circondati dalle fiamme. È Elsa che con i suoi poteri comincia a spegnere tutte le fiamme, che sembrano generarsi all'improvviso. Con un colpo d'occhio Elsa si accorge che è una piccola salamandra che saltando da un albero all'altro li fa incendiare. Elsa calcola velocemente il prodotto di tutti i numeri primi p per i quali $n = p^4 + 39$ ha esattamente quattro divisori. Così facendo riesce a raffreddare l'animaletto che si rivela essere lo spirito del fuoco. Che numero ha permesso ad Elsa di spegnere l'animaletto e con esso tutti i fuochi da lui appiccati?

13. LO SCIALLE

I Northuldri riconoscono come appartenente alla loro tradizione lo scialle che indossa Anna. Per le due sorelle adesso è tutto chiaro. È stata la loro mamma a salvare il principe Agnarr dalla magia della nebbia per poi sposarlo. La vecchia Yelana, capo dei Northuldri spiega ad Anna che per fare uno scialle del genere, si prende su un telaio un triangolo ottusangolo ABC di area pari a $40\ \text{dm}^2$. Poi si sceglie H un punto del lato AC e si costruiscono K ed L i punti rispettivamente giacenti sui lati (o sui loro prolungamenti) di BC e AB tali che HB, CL e AK siano fra loro paralleli. Lo scialle triangolare viene realizzato tra i punti HKL. Yelana fa notare alle due ragazze che sul loro scialle, tra i quattro simboli degli elementi ve n'è un quinto mai visto prima. Mentre Elsa riflette sulla cosa, Anna chiede: "Che area ha lo scialle in cm^2?"

14. LA NAVE

Spinta dallo spirito del fuoco, Elsa decide di dirigersi ancora più verso nord con Anna e Olaf al seguito per seguire la voce che la chiama. I tre ritrovano sulla baia il relitto della nave dei genitori, al cui interno rinvengono un foglio di carta criptato. Se $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, $\overline{ea}$ sono cinque numeri di due cifre (dove la prima lettera indica la cifra delle decine, la seconda delle unità), sapendo che $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}+\overline{ea}=165$, quante sono le possibili cinquine ordinate (a,b,c,d,e)? Elsa risolve l'enigma e il foglio si rivela per essere un'antica mappa che descrive la rotta per Ahtohallan, il fiume mistico che dovrebbe contenere tutte le risposte sul passato e di cui la madre cantava in una ninna nanna. Elsa capisce che i genitori erano partiti da Arendelle per trovare la ragione dei suoi poteri, così decide di continuare da sola verso nord per non mettere ancora più in pericolo Anna e Olaf. Che numero ha permesso ad Elsa di scoprire l'antica mappa?

15. LO STRATAGEMMA

Per mettere in atto il suo piano e non farsi più seguire da Anna e da Olaf, Elsa realizza una scultura di ghiaccio a forma di tetraedro $ABCD$ che fa scivolare fino al fiume. Se nel vertice A si incontrano tre triangoli, tutti e tre rettangoli in A e se i tre spigoli uscenti da A hanno lunghezze $AB = 200$ cm, $AC = 400$ cm, $AD = 600$ cm, che raggio (in cm) ha la sfera inscritta nel tetraedro dove Anna è stata rinchiusa con Olaf dalla magia di Elsa? (Dare come risposta la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini)

16. LA VOCE DI AHTOHALLAN

Nel mare del nord Elsa incontra e doma il Nøkk, lo spirito dell'acqua e grazie al suo aiuto raggiunge Ahtohallan, che è in realtà un ghiacciaio. Sulla porta di ingresso della grotta dei ricordi vede un esercito disposto in 3 file parallele lunghe 2020 soldati. Ogni soldato può essere sincero o bugiardo e tutti quelli della fila di sinistra affermano "intorno a me c'è almeno un bugiardo", quelli della fila centrale dicono "intorno a me c'è esattamente un bugiardo", e infine quelli delle fila di destra affermano "intorno a me c'è almeno uno che non è sincero". Quanti sono i soldati bugiardi dell'esercito schierati nella fila di sinistra? Elsa risolve l'enigma e rivede tutti i ricordi della sua infanzia e quanto accaduto prima della sua nascita. Scopre che la voce che la chiamava appartiene allo spirito di Idulna, rifugiatosi ad Ahtohallan, e che la Northundra ha richiamato a sé la figlia affinché giungesse nel magico luogo che l'aveva benedetta perché accettasse pienamente sé stessa e diventasse così il Quinto Spirito. Qual è stata la risposta che ha permesso ad Elsa di conoscere la verità? (N.B. Per "intorno a me" si intendono le persone che ogni soldato ha davanti, dietro e ai suoi fianchi. Quelli all'inizio o alla fine delle file hanno solo due o tre persone intorno.)

17. LA VERITÀ

Inoltrandosi nel cuore più profondo di Ahtohallan, Elsa apprende che la diga è stata costruita da Re Runeard non come un dono, ma in modo di ridurre le risorse dei Northuldri per la paura che questi potessero prendere il controllo del suo regno sfruttando gli spiriti della natura. Lui stesso uccise il capo dei Northuldri a tradimento, e questo fu il misterioso evento che diede inizio al conflitto. Il gelo causato da quel ricordo è troppo perfino per Elsa che comincia a trasformarsi in ghiaccio. Un attimo prima di rimanere completamente congelata riesce a calcolare in quanti modi diversi si possono posizionare due indistinguibili regine bianche degli scacchi su due caselle nere di una scacchiera 8×8 in modo che le due regine non si possano mangiare tra loro e grazie alla forza di questo risultato riesce a trasmettere il ricordo di quanto appena scoperto ad Anna. Con la scomparsa della magia di Elsa, Olaf si scioglie e scompare. Quale numero ha permesso alle due sorelle di condividere il ricordo pur a grande distanza?

18. LA DIGA

Anna riceve il messaggio di Elsa e conclude che la diga deve essere distrutta per ripristinare la pace, anche se ciò comporterà la distruzione di Arendelle, che sarà travolta dall'irrompere del fiume nel fiordo. Osserva che i Giganti della terra si trovano nei due punti C e D che con gli estremi della diga A e B formano esattamente un quadrato $ABCD$. La diga ha la forma di una semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato. Anna si posiziona nel punto P, il punto più debole della diga e osserva che PD e PC tagliano il lato AB rispettivamente nei punti E ed F in modo che $AE = 108$ m e $BF = 75$ m. Facendo confusione riesce ad attirare l'attenzione dei giganti che scagliando enormi massi distruggono l'enorme diga. Quanto misurava la larghezza della diga, cioè il diametro AB?

19. L'INONDAZIONE

La distruzione della diga ha come risultato un'inondazione che invade il fiordo e punta verso Arendelle. Il fondo del ghiacciaio di Ahtohallan si rompe ed Elsa si scioglie sprofondando nel mare. Lo spirito dell'acqua raggiunge la ragazza e la salva. Elsa guida lo spirito verso Arendelle e vi giunge in tempo per tentare di frenare l'onda che spazzerebbe via il reame. Elsa costruisce a protezione della città un ottaedro regolare $ABCDEF$ di ghiaccio. Se sulle facce ABC e ACD, aventi in comune lo spigolo AC, chiamiamo L, M ed N rispettivamente i punti medi dei segmenti AB, AC e CD, quanto vale il rapporto tra l'area totale dell'ottaedro e l'area del triangolo LMN che ha salvato il regno di Arendelle?

20. LIETO FINE

Mentre il muro di nebbia scompare, le due sorelle si riuniscono. Elsa chiede ad Anna di fare un pupazzo di neve ed insieme realizzano il pupazzo di Olaf. Elsa calcola tutte le coppie ordinate di interi positivi (a,b) per le quali l'espressione $\sqrt[3]{(a+2b)(a^2+80b)}$ è un numero primo e così riesce a ridare la vita ad Olaf. Kristoff propone ad Anna di sposarlo, e lei accetta. Elsa spiega che lei ed Anna sono ora il ponte tra le persone e gli elementi della natura. Anna, che si è comportata in maniera saggia e responsabile, diventa la nuova regina di Arendelle, mentre Elsa si stabilisce nella foresta incantata per tenere in equilibrio gli elementi. Qual è il risultato della somma di tutti i numeri primi trovati che hanno permesso ad Olaf di ritornare in vita?

Titoli di coda

Con la partecipazione di:

Carlo Càssola
Liceo Scientifico "N. Copernico" di Udine

Claudia Manotti
IIS "B. Russell" di Guastalla

Lorenzo Mazza
Liceo Scientifico "A. Avogadro" di Roma

Simona Pieri
Convitto Nazionale "Principe di Napoli" di Assisi

Simone Bertone
ISIS "Copernico-Luxemburg" di Torino

Un ringraziamento speciale a:

Roberta Corisello
ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

Santina De Monte
ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

Ugo Tomat
Laureato in Matematica

Andrea dal Zotto
Scuola di Studi Superiori "Ferdinando Rossi" di Torino

Mara Barucco
IIS "Antonietti" di Iseo

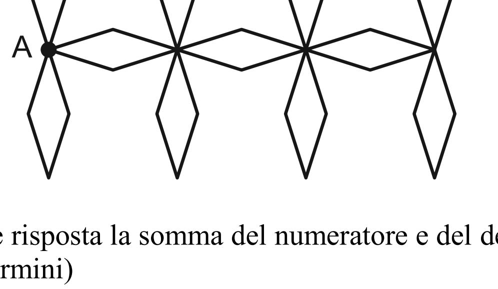
Andrea E. Monti
"Scuola Normale Superiore" di Pisa

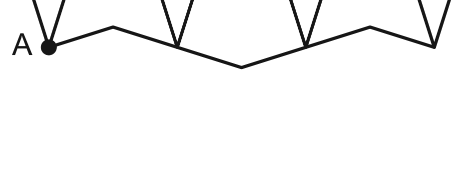
Regia di:

Sandro Campigotto
UMI Commissione Olimpiadi
ISIS "Magrini-Marchetti" di Gemona del Friuli

21. UNA VISITA AGLI AMICI

Olaf raggiunge il vecchio palazzo di ghiaccio di Elsa dove vivono Marshmallow e gli Snowgies. Con dovizia di particolari racconta loro tutti gli eventi che ha appena vissuto e mentre descrive di come Elsa ha placato gli spiriti degli elementi, disegna "pattinando" sul pavimento ghiacciato del salone a partire dal punto A, senza staccare mai i pattini dal ghiaccio, e senza passare mai due volte per lo stesso tratto, la figura riportata qua sotto a sinistra. Se tutti i possibili percorsi sono equiprobabili, qual è la probabilità che a disegno non ancora completato la figura incisa sul ghiaccio sia esattamente quella riportata a destra?





(dai come risposta la somma del numeratore e del denominatore della probabilità scritta sotto forma di frazione ridotta ai minimi termini)

FINALE GARA A SQUADRE FEMMINILE 2020 (22/09/2020)

			D.1 41	D.2 65	D.3 34	D.4 64	D.5 66	D.6 38	D.7 84	D.8 106	D.9 43	D.10 53	D.11 115	D.12 67	D.13 76	D.14 78	D.15 120	D.16 34	D.17 50	D.18 120	D.19 71	D.20 106	D.21 68
1	Marconi (Carrara)	1559	41		34	64	70	38	99	94	44	61	226 J	82	96	53	140	34	44		75	-20	74
2	Copernico (Prato)	1495	37	56	35	72	56	38	88	106	45	58	111	67	84	74		38	130 J		76	114	
3	Magrini-Marchetti (Gemona del Friuli)	1387	51	85	44	84	64	38	90	121	33			73	77	-10		34	40		91	116	146 J
4	Leonardo (Brescia)	1382	36	80	34	64	66	58	82	126	63		-20	67	91	62		34	92 J		62	102	73
5	Golgi (Breno)	1294	41	70	34	69	46	38	86	-10	33		270 J	71	82	81		54	45		74		
6	Redi (Arezzo)	1289	56		34	64	-20	53			47		130	75	86		135	34	43	280 J			62
7	Moro (Reggio Emilia)	1217	42	68	34	66	56	38	85	112	23	59		67		88		37	-20			252 J	
8	Lussana (Bergamo)	1112	61		38	65	76	38			39		105	77	81			44	58		152 J		68
9	Respighi (Piacenza)	1017	49	69	54	64	66	48	104	-10	41			72		196 J		34	20				
10	Calini (Brescia)	1013	41	75	39	67	69	43	79	-40	33	68	110		79	-10		42	-10		118 J		
11	Marinelli (Udine)	967	41		34	54	66	38			33	57		174 J		-20		34	70			100	76
12	Copernico (Udine)	936	41		24	64	58	39		101	43	63				186 J		34	30		73	-30	
13	Grigoletti (Pordenone)	870		73	49	60	56	38	84		53			70				35	-20		162 J		
14	Cassini (Genova)	859	-20	71	34	79	81	40			33	73			70	-20		34	40		154 J		-20
15	Righi (Roma)	769	44	-10	34	68	76	41	67		58			69	68	-40 J		34	-20				70
16	Copernico (Brescia)	765	41		42	64	71	32			46			68				39				182 J	-30
17	Frisi (Monza)	697	-10		36		47							57					60			121	176 J
18	Da Vinci (Treviso)	693	45	47	24	54	72	38			33							68 J	41		-10		71
19	Marconi (Parma)	624	31		37	64	66	46	-10		48							80 J	52				
20	Battaglini (Taranto)	479	21		34					-10	43					152 J		49	-10				-10
21	Ferraris (Torino)	473	43		34	64	-30	38			33			67				34					-20 J
22	Pacinotti (Cagliari)	258	-10		40		-20	44		-20	-50							34	30	J			
23	Maffei (Riva del Garda)	245								-10	23					-20		72 J	-30				

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione

XXI Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 17 Settembre 2020

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Con le mani coordinate

Elpha, la primogenita del re e della regina di Arrotondale, scoprì fin da giovanissima di avere poteri matemagici: sapeva controllare il ghiaccio, e usarlo per risolvere con un gesto delle mani problemi di geometria. Congiungendo i palmi, evoca un triangolo ABC con i lati lunghi $AB = 5$, $BC = 12$, e $CA = \sqrt{97}$. Poi muove le dita e piazza un cristallo di ghiaccio nel punto medio M di BC e nell'intersezione P tra la mediana AM e la bisettrice di $\angle ABC$. Infine fa cadere una coltre di neve sul triangolo PBM. Quanto vale l'area della superficie ricoperta di neve? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

2. L'alto pupazzo [$\star$]

«Facciamo un pupazzo di neve?» chiede Ganna a Elpha. «Va bene,» risponde la sorella «ma deve essere *gigantesco*!» E così, con un movimento repentino della mano il pupazzo di neve prende forma. Visto in sezione, questo appare come 2020 cerchi $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2020}$, tali che ciascuno è tangente esternamente al successivo, e con la seguente proprietà: per ogni i con $2 \leq i \leq 2019$, le tangenti comuni esterne di Γ_i e Γ_{i+1} si intersecano nel centro di Γ_{i-1}. Sapendo che i raggi di Γ_1 e Γ_2 sono entrambi uguali a 1, quanto vale il raggio di Γ_{2020}?

3. I problemi del pupazzo

Appena creato, il pupazzo di neve comincia a vaneggiare sparando problemi a raffica: per esempio, esclama «Siano (x_i, y_i), per $i = 1, 2, \ldots, k$, tutte le coppie ordinate di interi positivi che soddisfano $x^x + y^y + 11 = 13x^y y^x$.» «Che carino! Lo chiamerò Olaforum, con tutti questi problemi», decide Ganna. Ma il pupazzo la ignora e continua: «Quanto vale il prodotto di tutti gli $x_i^2 + y_i^2$?»

4. Passatempi da principesse

Ganna rimpiange il tempo in cui poteva giocare spensierata con la sorella Elpha, prima della scoperta dei suoi prodigiosi poteri. In uno dei loro giochi preferiti, avevano due pile con rispettivamente 2020 e 2021 monete. Ad ogni mossa Ganna sceglieva una pila e toglieva alcune monete da essa, mentre Elpha calcolava il prodtto del numero delle monete tolte per il numero delle monete nella pila non scelta. Quanto poteva valere, al massimo, la somma di tutti questi prodotti?

5. Pavimento colorato

Il pavimento della stanza del castello dove Elpha è tenuta nascosta ha una peculiare colorazione: esso appare come una scacchiera 9×9 tale che, se si numerano le righe e le colonne da 1 a 9, le caselle con le coordinate entrambe dispari sono blu, e le restanti sono bianche. Elpha, per passare il tempo, si diverte a cercare modi fantasiosi di camminare sul pavimento. Questa volta, decide di partire dalla casella di coordinate $(1, 1)$, posta in basso a sinistra, e di muoversi sempre da una casella a una adiacente andando in alto o a destra. Si ferma poi su un'altra casella blu, diversa da quella di partenza. Quanti sono i percorsi che può aver seguito? *Ogni percorso può contenere anche altre caselle blu oltre a quella finale.*

6. Strette di mano a suon di musica

All'incoronazione di Elpha segue una sfarzosa serata di balli nel salone del maniero di Arrotondale. In una delle danze, 15 ballerini si dispongono su 5 file, in modo che ogni fila abbia un numero diverso di persone e ogni fila contenga almeno una persona. Durante i movimenti del ballo ogni persona stringe la mano a tutte le persone che stanno nelle file adiacenti alla sua (le persone nella prima e nell'ultima fila stringono le mani alle persone di una sola altra fila). Quante sono, al più, le strette di mano?

7. Colpo di fulmine

Al ballo dell'incoronazione di Elpha, Ganna si è presa una cotta per il principe Hahn! Ha riempito pagine e pagine del suo diario su di lui. Quante? Un quadrato perfetto che si scrive in base 10 come `ABBA9` (con la cifra $\mathtt{A} \neq 0$). Quanto vale il numero di due cifre che si scrive in base 10 come `AB`? *Rispondere con la somma di tutti i possibili valori che* `AB` *può assumere. Le cifre* `A` *e* `B` *non sono necessariamente distinte.*

8. Spartizione di territorio [⋆]

All'incoronazione di Elpha, il duca di Besselton non rinuncia a tessere le sue trame politiche. Ha portato una mappa che raffigura un territorio circolare di 10000 miglia di diametro, su cui sono segnate con dei punti le capitali degli otto regni del mondo conosciuto. Il duca propone che i confini vengano modificati in modo che ogni regno sia composto da tutti e soli i punti che sono più vicini alla propria capitale che a una delle altre sette. In questo modo, il regno di Besselton e quello di Arrotondale avrebbero la forma di due quadrati congruenti con un lato in comune, interamente contenuti nella mappa. Quante miglia misura, al massimo, tale lato?

9. Meglio la moneta unica [⋆]

Nel regno di Arrotondale sono in uso solo tre tipi di monete, ognuna che vale un numero intero positivo di corone. Detti x, y e z i loro valori, si ha che almeno uno di essi è primo, che $x+y+z=112$, e che $x>(y+1)(z+1)$. Purtroppo, ci sono 20 interi positivi N tali che non è possibile formare un insieme di monete che valga esattamente N corone. Questo fatto rende più complicato il commercio e danneggia l'economia del regno. Quali sono i valori delle tre monete? *Si risponda indicando il prodotto* xyz.

10. Fuga dal palazzo

L'incoronazione è stata un disastro! Tutti hanno scoperto i poteri di Elpha, e lei scappa spaventata. La pianta del palazzo è un quadrato formato da 5×5 caselle colorate a scacchiera. Elpha si trova nella casella nera centrale, e vuole scappare con mosse che vanno da una casella a una di quelle adiacenti (in orizzontale o in verticale), fino a raggiungere una delle quattro caselle d'angolo. Per evitare nobili e soldati, ad ogni mossa cambia direzione (da orizzontale a verticale e viceversa), e non ripassa mai due volte dalla stessa casella nera, in particolare non tornando mai nella casella centrale. Quanti percorsi diversi può fare? *È invece permesso passare più volte su una stessa casella* bianca. *È permesso anche passare da una casella d'angolo senza fermarsi e proseguire fino a raggiungerne un'altra.*

11. Tanto lavoro per nulla

Kristoffel vende blocchi di ghiaccio per vivere. Sulla sua slitta, tirata dalla fida renna Venn, ha già un numero primo p di blocchi, e oggi lo aspetta una giornata di lavoro di n ore. Ogni ora taglia dalla montagna un numero di blocchi pari al numero di ore di lavoro mancanti alla fine della giornata di lavoro (quindi nell'ultima ora 0 blocchi). Però, contemporaneamente, nella k-esima ora esattamente k^2 blocchi si sciolgono e vanno perduti, per $k=1,\dots,n$. Alla fine della giornata, Kristoffel guarda desolato la sua slitta e vede che l'ultimo blocco sta finendo di sciogliersi proprio ora e non ne è rimasto neppure uno! Quanto valgono n e p? *Rispondere con la somma di tutti i valori possibili per* $n+p$. *Si ricorda che* 1 non *è un numero primo.*

12. Il lato spezzato

Ganna ha incontrato Kristoffel, che è la persona giusta per aiutarla a trovare la sorella Elpha: conosce la foresta come le sue tasche. Essa ha la forma di un quadrilatero convesso $ABCD$, con $\angle ABC = 90°$. Ganna si trova ora in un punto F interno al segmento AB, tale che $\angle ADF = 90°$, $\angle FDB = \angle BAC$. Kristoffel, sapendo che $AB=232$, $DF=138$, $FC=64$, sa calcolare al volo la differenza delle misure dei segmenti AF e BF. Quanto vale?

13. Mentre gli anni passano

Il generale Matiyasevich è rimasto bloccato con la sua truppa per lunghi anni nella Foresta Incantata, ma non ha mai rinunciato a far allenare i suoi 2020 soldati. Ogni giorno, forma due squadre, una all'attacco e una alla difesa (non per forza con lo stesso numero di soldati), e le fa combattere. Ognuna delle due squadre deve contenere almeno un soldato, e non è necessario che ogni giorno tutti i soldati siano impegnati. Quanti allenamenti diversi possono fare in questo modo? *Un allenamento si considera ripetuto se ha lo stesso sottoinsieme di soldati all'attacco e lo stesso sottoinsieme alla difesa. Detto* N *il numero di allenamenti, indicare nelle quattro cifre della risposta da sinistra a destra il resto della divisione di* N *per* $3,4,5,7$.

14. Connessi da un triangolo [⋆]

Kristoffel e Ganna stanno setacciando la foresta per trovare dove si è nascosta Elpha. La stanno cercando muovendosi all'interno di un'area innevata a forma di rettangolo $ABCD$, con $AB=40$ e $BC=10$. Non l'hanno ancora trovata, però c'è stato un momento in cui le loro tre posizioni formavano un triangolo equilatero: in quel momento Kristoffel si trovava in un punto del rettangolo distante meno di 10 da BC e Ganna in un punto del rettangolo distante meno di 10 da AD. Quanto vale l'area della regione in cui può trovarsi Elpha in base a questa informazione? *Il punto in cui si trova Elpha non si trova necessariamente all'interno del rettangolo innevato.*

15. Biliardo con il dardo

Elpha si trova nel suo palazzo di ghiaccio, in un vertice di una stanza rettangolare con i lati di lunghezza 1 e $\sqrt{2}$. Scorge i due soldati ingaggiati dal principe Hahn per ucciderla, e scaglia un dardo di ghiaccio lungo la bisettrice uscente dal vertice. Il dardo raggiunge il lato opposto, che chiameremo ℓ, e rimbalza perfettamente. Rimbalza poi molte altre volte colpendo tutte le pareti della stanza. Dopo il 2415esimo rimbalzo, sfortunatamente il dardo colpisce Ganna al cuore, congelandola immediatamente. Quanti tra questi 2415 rimbalzi sono avvenuti sul lato ℓ?

16. Triangolo gigante [⋆⋆]

La Foresta Incantata è un luogo di trasformazione, ma anche un luogo a forma di triangolo ABC, il cui lato AB coincide con una possente diga. Nel tentativo di colpire Ganna, un gigante di ghiaccio scaglia un macigno che si abbatte sulla diga nel punto $P \in AB$. Detti X il centro della circonferenza circoscritta ad APC e Y il centro della circonferenza circoscritta a BPC, il gigante si trova nell'intersezione Z delle rette AX e BY. Sapendo che $AB = 91$, $BC = 104$, $CA = 65$ e che $AX = 35$, qual è la lunghezza di CZ?

17. Alla ricerca di risposte [⋆]

«Ganna? Elpha? Stampacchia?» esclama Olaforum vagando nella foresta. È diventato grande e saggio, e mentre cammina pondera i grandi interrogativi dell'esistenza. Ad esempio: detto F_k il k-esimo numero di Fibonacci, quante sono le coppie di interi (n,m) con $0 \leq n,m \leq 2016$ tali che esista un intero non negativo a per il quale $F_n \cdot F_m = F_a$? *Ricordiamo che i numeri di Fibonacci sono definiti ricorsivamente come $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ per $k \geq 0$.*

18. Pozioni benefiche e pozioni malefiche [⋆]

Nel tentativo di curare Ganna, il re dei troll Grampapà rispolvera tutte le $2^{128} - 1$ pozioni magiche che può formare combinando i suoi 128 ingredienti. Di queste, alcune sono benefiche e le altre sono malefiche (a parte quella formata da tutti gli ingredienti, che per qualche antica magia è sia benefica che malefica). Combinare tra loro due pozioni benefiche ne produce una benefica, e combinare tra loro due pozioni malefiche una malefica. Inoltre, se una pozione è benefica, la pozione formata da tutti gli ingredienti non inclusi in essa è malefica, e viceversa. Grampapà non sa quali pozioni sono benefiche e quali malefiche, ma può scoprire l'effetto di una pozione distillandola. Vuole scoprire esattamente quali pozioni sono benefiche e quali malefiche, distillando il minor numero possibile di pozioni. Quante ne serviranno?

19. Sommatoria in binario

«Solo un atto di vero amore può sciogliere un cuore di ghiaccio». Invece, per un cervello di ghiaccio un rimedio efficace potrebbe essere cimentarsi con il seguente problema. Siano $z(n)$ e $u(n)$ due funzioni che restituiscono rispettivamente il numero di zeri e di uni nella scrittura in base 2 del numero n, e sia $f(n) = (-1)^{z(n)}/2^{u(n)}$. Per esempio, quindi, $f(13) = f(1101_2) = (-1)^1/2^3 = -\frac{1}{8}$, mentre $f(17) = f(10001_2) = (-1)^3/2^2 = -1/4$. Calcolare quanto vale la somma $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(1023)$. *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

20. Un problema di amore vero [⋆⋆]

Quale atto di vero amore maggiore di risolvere per Ganna un problema con due stelline? Kristoffel non sarà certo il principe dei matematici, ma a differenza di Hahn ama Ganna, e come simbolo del suo amore è riuscito nell'impresa. Il problema che ha risolto è questo: sia a_n una successione di interi positivi distinti tale che $a_1 = 3$ e $a_{2020} < 350000$. È noto che $\mathrm{MCD}(a_n, a_m) = a_{\mathrm{MCD}(n,m)}$ per ogni m, n. Sia N il minimo valore possibile per a_{2020}; sia invece M il massimo valore possibile di a_{2020} supponendo che $a_{3030} = 50337$. Sulle guance di Ganna ricomincia a tornare la vita, mentre Kristoffel scrive sul cartellino delle risposte le ultime 4 cifre di $N + M$...

21. Fino al secondo film

Così, Elpha ritorna ad Arrotondale, e Ganna e Kristoffel coronano il loro sogno d'amore, vivendo felici e contenti per tantissimi anni; per la precisione $n = 1 + 11 + 111 + \cdots + 111\ldots111$, dove l'ultimo addendo ha 2020 uni. Quanto vale la parte intera di $10^{2023}/n$?

FINALE GARA A SQUADRE 2020 (23/09/2020)

			D.1 29	D.2 76	D.3 40	D.4 24	D.5 46	D.6 28	D.7 71	D.8 130	D.9 70	D.10 47	D.11 52	D.12 50	D.13 70	D.14 130	D.15 60	D.16 89	D.17 103	D.18 122	D.19 41	D.20 124	D.21 29
1	Jacopo da Ponte [Bassano del Grappa]	1367	44	96	40	26	56	48	81	-10	72	47	43	56	85	125	60	218 J			41		29
2	Volta [Milano]	1309	33	80	-30	44	26	30	52	140	74	67	32	60	78		70			-20	61	268 J	34
3	Marconi [Carrara]	1308	29	86	30	28	66	18	61		70	53	57	55	66	300 J	63		83	-10	34	-10	19
4	Galilei [Civitavecchia]	1117	32	91	40	24	38	28	91			47	52	50	90	-40	68	154 J	123		-20		39
5	Ferraris [Torino]	1104	35		30	30	61	43	-10		71	45	56	50	70	120	42	208 J			21	-10	32
6	Golgi [Breno]	938	29	82	31	25	44	28	61			57	58	140 J	64			99			-10		20
7	Fermi [Padova]	899	29		45	39	42	8	66	-20	70	49	55	50	60		75				92 J		29
8	Mascheroni [Bergamo]	820	29			14	50	29	71		160 J	37	52	54	65	-20	54				-20		35
9	Leonardo [Brescia]	798	39		34	34	6	36	75	-10		31	62	58	62		66				21		74 J
10	Magrini-Marchetti [Gemona Del Friuli]	772	29		40	24	46	28	71		70	84 J	52	52	60	-10					36		-20
11	Copernico [Brescia]	767	29		48	14	26	28	61	-10	156 J	47	57		40		-10				42		29
12	Majorana [Desio]	762	30	81		24	46	28	74		170 J	28	42										29
13	Leopardi-Majorana [Pordenone]	746	29		50	29	51	18	-10	-10	70		54		43		140 J				43		29
14	Copernico [Prato]	719	31		32	24	36	28			75	47	72	50	50	J				-10	25		49
15	Dini [Pisa]	699	29		46	24	47	28			63	37	52		-30	-10			118	J	41		44
16	Nievo [Padova]	652	29			27	46	28	71			47	42	40	70	-40 J	61				41		-20
17	Calini [Brescia]	588	37	84	-10	24	-40	8		-10		-20	60	41	71	J	65				49		19
18	Cattaneo [Torino]	520	34		60	14	-40	33	86		66	62		65	-20		-20					-20 J	-10
19	Majorana [Brindisi]	510	49			24	46	18	77					106 J	-10		-10						
20	Volta [Foggia]	506	29			14	39	28	146 J			50	-20	50	-30								-10
21	Spano [Sassari]	471			90 J		-20	31	79		90				-30							-10	31
22	Galilei-Moro [Manfredonia]	404	29		43	4	16	34		-10		-10	52				-10			J	47		-1
23	Da Vinci [Milano]	353				24	26	28					52		-20			J					33
24	Tassoni [Modena]	316	29			32	46	32		-10		37					-20	-40 J					

XXI Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Soluzioni – 17 Settembre 2020

Nr.	Problema	Soluzione
1	Con le mani coordinate	0083
2	L'alto pupazzo [⋆]	3125
3	I problemi del pupazzo	0200
4	Passatempi da principesse	2420
5	Pavimento colorato	1470
6	Strette di mano a suon di musica	0046
7	Colpo di fulmine	0109
8	Spartizione di territorio [⋆]	4000
9	Meglio la moneta unica [⋆]	5280
10	Fuga dal palazzo	0056
11	Tanto lavoro per nulla	0014
12	Il lato spezzato	0136
13	Mentre gli anni passano	2201
14	Connessi da un triangolo [⋆]	0946
15	Biliardo con il dardo	0708
16	Triangolo gigante [⋆⋆]	0039
17	Alla ricerca di risposte [⋆]	2093
18	Pozioni benefiche e pozioni malefiche [⋆]	0008
19	Sommatoria in binario	1365
20	Un problema di amore vero [⋆⋆]	9578
21	Fino al secondo film	8100

XXI Gara Nazionale a Squadre

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Finale Nazionale – 17 Settembre 2020

Ringraziamo per il loro contributo alla preparazione del testo e al testing dei problemi:

Lorenzo Ambrosino, Edoardo Annunziata, Giovanni Barbarino, Riccardo Begliomini, Lorenzo Benedini, Edoardo Bertoletti, Maria Bevilacqua, Andrea Bianchi, Alberto Bordin, Sebastiano Boscardin, Alberto Cagnetta, Alberto Casali, Camilla Casamento Tumeo, Matteo Casarosa, Andrea Ciprietti, Jacopo D'Aurizio, Giuseppe Di Fabio, Simone Di Marino, Tommaso Faustini, Luca Ferrigno, Bernardo Forni, Linda Friso, Lorenzo Furio, Andrea Gallese, Giacomo Gallina, Andrea Ghilardi, Filippo Girardi, Federico Glaudo, Davide Gori, Giovanni Interdonato, Alessandro Iraci, Kirill Kuzmin, Marco Lastres, Paolo Leonetti, Michele Longo, Manuel Luci, Luca Macchiaroli, Marco Magno, Stefano Mannella, Luca Marchesini, Fabio Marconi, Giuseppe Mascellani, Simone Masserini, Giona Micossi, Giona Micossi, Matteo Migliorini, Matteo Palmieri, Maurizio Paolini, Andrea Parma, Saro Passaro, Simone Pelizzola, Andrea Pitrone, Federico Poloni, Paolo Prenassi, Matteo Protopapa, Chiara Ricciuti, Vittoria Ricciuti, Matteo Rossi, Beatrice Segalini, Edoardo Siniscalco, Alessio Spagnoletti, Cesare Straffelini, Lucio Tanzini, Bernardo Tarini, Gianmaria Tomaselli, Marco Trevisiol, Davide Vecchi, Marco Vergamini, Federico Viola, Damiano Yoeme Bussagli, Matteo Zemello.

Per il loro contributo all'organizzazione logistica della gara a squadre:

Angelo Alfonso, Gioacchino Antonelli, Giorgio Audrito, Mara Barucco, Claudio Filippo Bianchi, Sandro Campigotto, Gabriele Dalla Torre, Simone Di Marino, Raimonda Frova, Kirill Kuzmin, Andrea Lavarone, Andrea Martin, Andrea Matiacic, Giuseppe Mascellani, Alessandro Oberti, Marco Palagi, Maurizio Paolini, Maria Antonietta Pici, Gaetano Prota, Pino Rosolini, Vlada Smirnova, Lucio Tanzini, Maria Volpini.