Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Sogno di una notte di mezzo inverno

di

Guglielmo Scuotilancia

25 gennaio 2019

Gara a Squadre Femminile – Testi dei problemi([1])

1. *LA PESCA* ——— Sandro Campigotto

Oberon Puck, mio fedele Puck! Mi devo vendicare di Titania. Continua a sbeffeggiarmi perché non conosco la matematica.

Puck (*Tra sé*) È vero, che cosa altro dovrebbe fare?

Oberon Aiutami! Questo cesto contiene tutti i numeri da 10 e 99, estremi inclusi. A caso, tu ne scegli uno, poi lo rimetti nel cesto, a quel punto io ne scelgo uno. Io vinco se il numero che ho scelto ha sia la cifre delle unità che quella delle decine maggiore o uguale alla rispettiva cifra del numero che tu hai scelto. Qual è la probabilità che io vinca?

[*Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

2. *LE AMPOLLE* ——— Mattia Fecit

Oberon Se voglio fare colpo su Titania, bisogna che lei dimentichi tutta la matematica che conosce. Devi premere sui suoi occhi il succo di bacca incoerente che fa dimenticare la matematica. Dato che ho vinto nella pesca dal cesto, vai tu a prendere il succo e mettilo in un'ampolla nera.

Puck Dove trovo un'ampolla nera?

Oberon Vai nella radura: c'è un'aiuola circolare tutta fiorita. La trovi là.

Puck (*Da solo, arrivato nella radura*) Ci sono cinque ampolle appoggiate sul bordo dell'aiuola. (*In ordine antiorario, sono una rossa, una bianca, una nera, una rosa, una blu.*) L'ampolla rossa è alla stessa distanza dall'ampolla bianca e dall'ampolla rosa, l'ampolla nera è opposta all'ampolla rossa rispetto al centro dell'aiuola. Le distanze dall'ampolla blu all'ampolla rosa e all'ampolla rossa stanno tra loro come 1 e 7. Sulla linea che congiunge l'ampolla rossa e l'ampolla nera, nel punto più vicino all'ampolla blu si trova un sassolino bianco. Oberon mi ha detto di prendere un'ampolla, ne prendo una. (*Prende l'ampolla blu*)

Voce fuori campo La larghezza massima dell'aiuola è 338 cm; quanto vale in cm il rapporto tra il quadrato costruito sul segmento che congiunge le ampolle nera e blu e il segmento che congiunge il sassolino con l'ampolla nera?

3. *DALL'ORTOLANO* ——— Luca Renzi

Atene, sorge il sole. L'ortolano è già al lavoro; ha appena finito di scaricare i sette tipi di frutta che ha acquistato al mercato generale.

Cotogna I frutti che l'ortolano ha nel negozio sono: mele tranne 936; arance tranne 936; banane tranne 936; kiwi tranne 936; mandarini tranne 936; mandaranci tranne 936; pere tranne 936.

Fondo D'accordo! (*Sbadigliando, ancora addormentato*) Ma quanti frutti ha in totale nel negozio?

4. *ENTRA DEMETRIO* ——— Alessandro Murchio

Teseo (*Cammina insieme a Ermia*) Demetrio, è una così bella giornata. Unisciti a noi; Ermia mi parlava di matematica.

Ermia (*A Demetrio*) Prendi quattro numeri interi positivi, a_1, a_2 ,a_3 e a_4...

Demetrio Tutti diversi?

Ermia No, possono essere come vuoi, anche tutti uguali ... E calcola la seguente operazione:

$$\star(a_1,a_2,a_3,a_4) = \begin{cases} \min\{a_1,a_2,a_3,a_4\} & \text{se MCD}(a_1,a_2,a_3,a_4)=1 \\ \max\{a_1,a_2,a_3,a_4\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Demetrio Beh, è facile: è una definizione per casi.

Ermia La domanda non è quella. Quante sono le coppie ordinate (x, y) di numeri interi positivi tali che, calcolando $\star(1347, 1911, x, y)$, si ottiene 2019?

Demetrio Sono tre... (*Ermia scuote la testa sconsolata.*)

([1]) In ogni problema, a fianco di ogni titolo, compare il nome dell'autore.

5. *ENTRA LISANDRO* ____________________ Sandro Campigotto

Teseo Lisandro, ho una domanda per te. In quanti modi diversi posso scegliere le terne ordinate di numeri interi positivi (a, b, c) con a, b e c minori o uguali di 100 tali che $c - b = b - a$?

Lisandro ...(*Ermia gli fa segno di non rispondere*)

6. *LE CICALE* ____________________ Andrea Damonte

Titania (*Nella radura vicino all'aiuola circolare fiorita*) Le cicale si sono posate sul bordo dell'aiuola: sono tante. Ora le conto: 1, 2, 3(*Continua sottovoce*), 119.

Oberon (*Pensando che Puck abbia versato il succo di bacca incoerente sugli occhi di Titania*) Quanti possono essere al massimo i triangoli rettangoli con vertici tre cicale?

Titania Oberon, come sei banale:(*Oberon si innervosisce*) è così facile!

7. *LE LUCCIOLE MAGICHE* ____________________ Francesco Raspaolo

Oberon Le lucciole mi fanno impazzire!

Puck Com'è possibile, mio signore? È inverno ed è giorno.

Oberon Sono magiche, e si accendono con ritmi diversi durante le giornate:

- la lucciola Kael si accende ogni giorno alle 9:00;
- la lucciola Kale si accende ogni 18 ore;
- la lucciola Kail si accende ogni 16 ore;
- la lucciola Kela si accende alle 23:30 ogni giorno in cui la lucciola Kale si è accesa due volte, altrimenti si accende alle 21:00;
- la lucciola Keil si accende un'ora dopo la lucciola Kela.

Oggi alle 9:00 si sono accese le lucciole Kael, Kale e Kail. Vorrei poter passare una notte senza vedere lucciole; per essere precisi, vorrei che non si accendesse nessuna lucciola per almeno 8 ore consecutive tra le 22:00 e le 9:00.

Puck (*Tra sé*) Meglio che non gli spieghi che non sono lucciole...

Voce fuori campo DOPO QUANTE ORE, A PARTIRE DA OGGI ALLE 9:00, SI ACCENDERÀ LA PRIMA LUCCIOLA DOPO LE 8 ORE CONSECUTIVE RICHIESTE DA OBERON?

8. *IN PIAZZA AD ATENE* ____________________ Mattia Fecit

Nella piazza di Atene, 2019 *persone sono in fila.*

Lisandro (*Rivolto a Ermia*) Ognuna di esse è un mentitore, cioè dice sempre il falso, oppure è un veritiero, cioè dice sempre il vero.

Ermia Dite qualcosa!

Tutte le persone in fila (*All'unisono*) Ci sono più mentitori alla mia sinistra che veritieri alla mia destra.

Ermia (*Sorridendo a Lisandro*) Tra le persone in fila quante sono quelle veritiere?

9. *IL DUECENTODICIASSETTESIMO* ____________________ Simone Muselli

Titania Diciamo che $l_u(n)$ il numero delle lettere nella parola che è la cifra delle unità del numero n. Ad esempio $l_u(10) = 4$.

Puck Ma $l_u(12) = 3$.

Titania Sì. Considera la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} b_1 = 7 \\ b_{n+1} = b_n + l_u(b_n) \end{cases}$$

Puck Adesso la scrivo tutta (*si mette a scrivere rapidissimo*).

Titania (*Dopo un po' di tempo*) Che numero hai scritto ora?

Puck Il duecentodiciassettesimo, b_{217}.

Voce fuori campo CHE NUMERO È IL DUECENTODICIASSETTESIMO SCRITTO DA PUCK?

10. ***MINIMO E MASSIMO*** ______ Silvia Sconza

Titania Puck, ascolta questo algoritmo: preso un numero n intero positivo o nullo

- se n è pari, gli sommi 1;
- se n è dispari, lo moltiplichi per 2.

Applica l'algoritmo al nuovo numero ottenuto finché il numero che ottieni rimane minore di 10000.

Puck Se prendo $n = 4999$, applico l'algoritmo due volte e ottengo 9999; a quel punto mi fermo.

Titania E bravo il mio Puck! Hai iniziato con un numero a quattro cifre e hai ottenuto il numero più grande possibile—partendo con un numero a quattro cifre. Ma qual è il più piccolo numero a due cifre dal quale si deve partire per ottenere il più grande numero a quattro cifre possibile—partendo da un numero a due cifre?

11. ***LE FATINE*** ______ Mattia Fecit

Nella radura, le quattro fatine Kael, Kale, Kail e Kela sono ferme sul bordo dell'aiuola circolare fiorita. La fatina Keil si ferma nella radura in un punto dove vede Kela e Kail, ma non vede Kael e Kale perché, rispettivamente, Kela e Kail le nascondono. In modo simile, la fatina Klea si ferma nella radura in un punto dove vede Kale e Kail, ma non vede Kael e Kela perché, rispettivamente, Kale e Kail le nascondono.

Klea 1⊐.

Keil 2⊐.

Oberon Che cosa fanno?

Puck Ciascuna dice con quale angolo di visuale vede le uniche due fatine sul bordo del campo che le sono visibili.

Oberon Con che angolo di visuale Kael vede Kale e Kela?

Puck 3⊐.

Oberon Credo di sapere l'ampiezza in gradi di 1⊐.

Puck Quanto è?

12. ***INSIEME*** ______ Alessandro Logar

Titania Puck, quanto fa la somma di tutti i prodotti

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$$

ottenuti scegliendo x, a_1, a_2, a_3 e a_4 in tutti i modi possibili purché gli insiemi $\{x, a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ siano uguali?

Oberon Non so che cosa sia un insieme...

13. ***I COLORI DEGLI ELFI*** ______ Simone Muselli

Fondo (*Rivolto a Cotogna*) Nel bosco gli elfi utilizzano certi colori come numeri, per la precisione usano 8 colori: 3 primari (giallo, blu e rosso), tre secondari (verde, viola e arancione), un neutralizzante (marrone) e uno speciale (oro). Ad ognuno di questi colori gli elfi associano una cifra—a colori diversi sono associate cifre diverse. Inoltre indicano il miscuglio di due colori con il segno $\oplus$ perché è simile alla somma.

Cotogna Cioè, quando si mischiano due colori, l'ordine dei componenti non ha importanza?

Fondo Esatto! Il miscuglio di due colori primari produce il colore secondario derivato dai due, cioè blu $\oplus$ giallo = verde, giallo $\oplus$ rosso = arancione, blu $\oplus$ rosso = viola—come ti ho detto, indipendentemente dall'ordine degli addendi. Mischiando un colore primario con un colore secondario derivato da esso si ottiene ancora il colore secondario, per esempio blu $\oplus$ viola = viola, tranne in un caso: giallo $\oplus$ arancione = oro. Qualsiasi altra combinazione dà marrone. So anche che

$$1 \oplus 2 = 3 \qquad 4 \oplus 5 = 9 \qquad 4 \oplus 0 = 4 \qquad 4 \oplus 2 = 6.$$

Cotogna Quali sono le cifre associate ai colori viola, blu, rosso, verde?

[*Dare la risposta partendo dalla cifra di sinistra.*]

14. ***L'EQUAZIONE MACCHIATA*** ——— Alessandro Murchio

Titania (*A Oberon*) Considera l'equazione che ho scritto.

Oberon Che cosa sono quei pallini neri?

Titania Temo che sia stato Puck che ha fatto uno scherzo: tutti i segni $+$ e i $-$ che erano presenti sono stati coperti con pallini neri. (*Quello che si legge è* $x^{11} \bullet x^{10} \bullet \ldots \bullet x \bullet 1 = 0$.) Beh, facciamo così. Quante sono le successioni di $+$ e $-$ che, inserite nell'equazione, sono tali che vi sia almeno una soluzione intera?

15. ***LE TRE FRAZIONI*** ——— Mattia Fecit

Oberon (*Svegliandosi*) Ho sognato tre frazioni, ciascuna con un numero di una cifra a numeratore, un numero di due cifre a denominatore. Le nove cifre erano tutte diverse e nessuna era 0. Calcolavo la somma e veniva un numero intero. A quel punto mi sono svegliato di soprassalto.

Titania Vuoi che ti dica che frazioni erano?

Voce fuori campo QUALI ERANO LE TRE FRAZIONI?

[*Rispondere fornendo la somma del numero ottenuto e dei tre denominatori: ad esempio, se il risultato della somma è* 3 *ed i denominatori sono* 45, 67, 89, *si deve scrivere* 0204.]

16. ***L'INSEGUIMENTO*** ——— Sandro Campigotto

Nel bosco, Lisandro, incantato, continua a inseguire Elena.

Lisandro (*Urlando verso Elena che corre*) Gioca con me, ti prego! Ciascuno di noi prende quattro carte di semi tutti diversi. Le mettiamo coperte davanti a noi e le giochiamo una alla volta rovesciandola contemporaneamente. Vinci se la carta che tu rovesci è dello stesso seme della carta che io rovescio. Altrimenti, se non vinci neppure alla quarta giocata, allora vinco io.

Elena (*Si ferma di colpo*) Ma ti rendi conto di qual è la mia probabilità di vittoria? (*Lisandro resta inebetito*)

[*Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

17. ***IL GIOIELLO*** ——— Sandro Campigotto

Puck (*Guardando Elena che dorme*) Bello il gioiello di Elena. Si inizia da un segmento lungo 15 mm. Poi hanno ripetuto quattro passi.

(1º passo) Usando ciascuno dei segmenti fissati, si costruisce un quadrato con il segmento come lato.

(2º passo) Si fissano due lati paralleli nel quadrato appena costruito.

(3º passo) Usando ciascuno dei lati appena fissati come ipotenusa, si costruisce un triangolo rettangolo isoscele.

(4º passo) In ciascuno dei due triangoli rettangoli appena costruiti si fissa un cateto come segmento.

Il gioiello è costruito con 4 esecuzioni complete della sequenza di quattro passi.

Voce fuori campo QUANTI MILLIMETRI È LUNGO IL PERIMETRO MASSIMO CHE PUÒ AVERE IL GIOIELLO?

18. *IL SALONE* ——— Luca Renzi

Teseo Questo salone ha forma ottagonale: al centro c'è un quadrato con lato di 450 cm; su ogni lato del quadrato centrale c'è un quadrato con un lato coincidente con quello quadrato iniziale; i vertici esterni dei quattro quadrati sono i vertici dell'ottagono.

Ippolita Ricordo quando i muratori hanno steso le mattonelle del pavimento. Avevano portato mattonelle quadrate, tutte con il lato di 90 cm, ma di due tipi diversi: il primo tipo decorato con quattro triangoli, due bianchi, due neri, che hanno un vertice in comune che è il centro della mattonella, in modo che due triangoli di colore uguale non abbiano lati in comune; il secondo tipo decorato con due rettangoli, uno bianco, uno nero, che hanno in comune un lato che passa per il centro della mattonella—ed è perpendicolare a due lati della mattonella.
I muratori avevano posato una mattonella del primo tipo al centro del pavimento, con i lati della mattonella paralleli ai lati del quadrato centrale e continuarono a posare mattonelle, accostandole in modo che, se due mattonelle avevano in comune più di un vertice, allora avevano un intero lato in comune.

Teseo Gli avevo ordinato di seguire tre regole:

- quando due mattonelle hanno un lato in comune devono raccordarsi *bene*, cioè tutti i punti del lato in comune devono avere lo stesso colore su entrambe le mattonelle;
- se si deve tagliare una mattonella, tutte le parti di mattonella che si formano devono essere utilizzate (ad esempio, se una mattonella viene tagliata in due, entrambi i pezzi devono essere usati);
- si devono tagliare il minor numero possibile di mattonelle.

Voce fuori campo Quante sono state al massimo le mattonelle del secondo tipo usate per la pavimentazione? E quante al minimo, sapendo che almeno una è stata usata?
[*Dare come risposta la differenza dei due numeri.*]

19. *I BATTERI* ——— Rodolfo Assereto

Fondo Placido, in questo periodo, sta solo controllando una coltura di batteri. Potrà occuparsi della nostra rappresentazione teatrale.

Cotogna Non credo, il suo lavoro di biologo lo tiene impegnatissimo. Si è accorto che

- ogni giorno nasce un nuovo batterio da ogni due batteri presenti nella coltura;
- nessun batterio muore.

Placido deve controllare il numero di batteri presenti ogni giorno a mezzogiorno. Se dal controllo risulta una quantità maggiore o uguale a 10000, deve ridurre il numero di batteri presenti nella coltura riempiendo bottiglie preparate per bloccare nuove nascite, ciascuna delle quali deve contenere esattamente 10000 batteri, in modo da riportare il numero nella coltura sotto la soglia dei 10000.

Fondo (*A Placido*) Quanti batteri ci sono ora?

Placido 2500.

Voce fuori campo Quanti batteri ci saranno tra 2019 giorni?

20. *QUEL CHE RESTA* ——— Alessandro Logar

In un angolo nascosto della radura, c'è un tabellone che mostra 4 cifre: N_1, N_2, N_3 *e* N_4. *E vi sono due tasti: il tasto* A *e il tasto* B..

Puck Sai come funziona?

Titania Sai che cos'è il resto della divisione del numero intero a per il numero intero b? (*Puck annuisce*) Chiamo $R(a, b)$ tale resto. Ti spiego come funziona il tabellone. Il tasto A modifica le cifre N_1, N_2, N_3 e N_4 nel seguente modo: al posto di N_1 scrive $R(N_1+2, 8)$, al posto di N_2 scrive $R(N_2+1, 4)$, al posto di N_3 scrive $R(N_3+3, 10)$ e al posto di N_4 scrive $R(N_4+1, 10)$. In modo analogo, il tasto B scrive al posto delle cifre N_1, N_2, N_3 e N_4 rispettivamente le cifre $R(N_1+1, 8)$, $R(N_2+1, 4)$, $R(N_3+2, 10)$ e $R(N_4+2, 10)$. Ad esempio, premendo due volte A e una volta B, partendo dalla configurazione iniziale dove le quattro cifre sono 0, sul tabellone si ottiene il numero 5384.

Puck Qual è il numero massimo che può comparire sul display partendo dalla configurazione iniziale dove le quattro cifre sono tutte 0?

21. *MIE FATE* Mihaela Badescu

Titania Mie fate, un semplice problema di geometria! Considerate un segmento CX lungo $24\,\mathrm{m}$. Sia A il punto medio di CX e sia B un punto tale che $AB = 8\,\mathrm{m}$ e $BC = 10\,\mathrm{m}$; considerate la bisettrice dell'angolo $\widehat{CAB}$ che interseca BC in D e la bisettrice dell'angolo $\widehat{BAX}$ che interseca BX in E. Quanto è lungo in cm il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ADE?

22. *L'AMICIZIA* Rodolfo Assereto

Oberon Puck, sai che cosa sono i numeri amichevoli?

Puck Sì, un numero n è k-*amichevole* quando puó esistere un gruppo di n persone in cui ognuno sia amico di esattamente altre k persone. Bisogna ricordare che la relazione di "amicizia" è simmetrica, cioé se A è amico di B, allora anche B è amico di A.

Oberon Perciò, ad esempio, un numero n è 7-*amichevole* quando puó esistere un gruppo di n persone in cui ognuno sia amico di esattamente altre 7 persone.

Puck Esatto! Ma perché mi chiedi questo, mio signore Oberon?

Oberon Perché Titania mi ha chiesto quanti sono i numeri 7-amichevoli da 1 a 2019, ma io non ho saputo risponderle. (*Guardando Puck con sospetto*) Ma tu le hai versato il succo di bacca incoerente sugli occhi?

23. *LO SBAGLIO* Simone Muselli

Oberon Puck, presto! Titania mi ha posto un altro quesito. Dimmi qual è il più piccolo numero intero maggiore di 1 uguale al prodotto della somma delle sue cifre e del prodotto delle sue cifre.

Puck (*Tra sé*) Devo aver sbagliato ampolla...

24. *IL REGALO* Daniele Boccalini

Oberon Ecco il mio regalo per te! (*Porge a Titania un cubo è formato da 125 cubetti luminosi*) Ciascuno dei cubetti può essere acceso oppure spento. Se un cubetto ha almeno tre facce che toccano cubetti già accesi, automaticamente si accende anche lui. Ma, se un cubetto spento ha meno di tre facce in comune con cubi accesi, non si accende.

Titania Bello! Se ho capito bene, io posso accendere alcuni cubetti; questi possono farne accendere altri, che insieme con quelli già accesi ne fanno accendere altri ancora, e così via.

Oberon Esatto! Sono felice che ti piaccia.

Titania Qual è il numero minimo di cubetti che io devo accendere affinché, dopo un numero sufficiente di passi, tutti si accendano di conseguenza?

Oberon ...

Fine del primo atto

Gara di matematica a squadre femminile 2019
Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Mihaela Badescu, Sandro Campigotto e Alessandro Logar, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Rodolfo Assereto, Andrea Damonte, Mattia Fecit, Veronica Grieco, Bruk Mohamed, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Cecilia Oliveri, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso.
Sono tutti ex-giocatori che sono ora iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. La probabilità che, scelti numeri tra 10 e 99, ciascun cifra del secondo sia maggiore o uguale alla omonima del primo è $\dfrac{45}{81} \cdot \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{36}$.
La risposta è 0047.

Soluzione del problema 2. Siano A, B, C, D, E le posizioni delle ampolle rossa, bianca, nera, rosa e blu rispettivamente. Sia H il punto dove si trova il sassolino: è sulla perpendicolare da E a AC. Innanzitutto, notiamo che AC è un diametro e i triangoli AEC e EHC sono simili, così

$$\frac{EC}{HC} = \frac{AC}{EC}.$$

Dunque che $\frac{EC^2}{HC} = AC = 2 \cdot 169 = 338$.
La risposta è 0338.

Soluzione del problema 3. I tipi di frutti in negozio sono 7 e, comunque presi 6 tipi di frutti la somma del numero di frutti dei sei tipi considerati è 936. Dunque ogni tipo di frutto è presente in eguale quantità e ci sono $\dfrac{936}{6} = 156$ frutti per tipo. Il numero di frutti presenti in negozio è $936 + 156 = 1092$.
La risposta è 1092.

Soluzione del problema 4. $1347 = 3 \times 449$, $1911 = 3 \times 637$, $2019 = 3 \times 673$. Quindi x e y devono essere multipli di 3 minori o uguali di 2019, e almeno uno tra x e y deve essere uguale a 2019. I multipli di 3 minori o uguali a 2019, diversi da 0 sono 673. Allora le possibili coppie sono $2 \times 673 - 1 = 1345$.
La risposta è 1345.

Soluzione del problema 5. La condizione $c - b = b - a$ è equivalente al fatto che b sia la semisomma di a e c. Questo assicura che b è compreso tra a e c e che a e c hanno la stessa parità. Le terne sono perciò totalmente determinate dalle coppie (a, c) tali che $1 \leq a \leq 100$ e $1 \leq c \leq 100$ e a e c sono entrambi pari oppure entrambi dispari. Dopo aver scelto c in 100 modi possibili tra 1 e 100, estremi inclusi, si sceglie a in 50 modi possibili: $50 \cdot 100 = 5000$.
La risposta è 5000.

Soluzione del problema 6. Un triangolo iscritto in una circonferenza è rettangolo se e solo se l'ipotenusa passa per il centro. Perciò per ottenere triangoli rettangoli è necessario e sufficiente che due vertici (cioè due maggiolini) siano diametralmente opposti: due tali generano $n-2$ triangoli rettangoli. Le coppie di vertici diametralmente opposti sono al massimo $[\frac{n}{2}]$. I triangoli rettangoli sono al massimo $[\frac{n}{2}](n-2) = 59 \cdot 117 = 6903$.
La risposta è `6903`.

Soluzione del problema 7. Si osserva innanzitutto che si torna alla situazione iniziale dopo 6 giorni, visto che $\text{mcm}(24, 48, 72) = 144 = 6 \cdot 24$. Sia d per comodità la data di "oggi".
La lucciola Kail si accende in 3 orari diversi: 9:00, 1:00, 17:00.
La lucciola Kale ha invece 4 orari differenti: 9:00, 3:00, 21:00, 15:00.
Si nota che vi è un orario dalle 0:30 alle 9:00 nel quale può potenzialmente non accendersi alcun lucciola. Quindi dalle 0:30 alle 9:00 del giorno $d+2$ non si accendono per 8 ore e mezza.
La risposta è 48.
La risposta è `0048`.

Soluzione del problema 8. Indichiamo le persone con $A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$, A_1 ha le altre persone alla sua destra. Prima di tutto dimostriamo per induzione che ogni A_n con n compreso tra 1 e 1010 (estremi inclusi) è un mentitore. Il caso base prevede che A_1 sia un mentitore, e questo è vero in quanto non ci sono persone alla sua sinistra. Supponiamo adesso che le prime k persone siano mentitori, e dimostriamo che A_{k+1} mente se $k+1 \leq 1010$. Con l'intenzione di ottenere un assurdo, supponiamo che $k+1 \leq 1010$ e A_{k+1} dica la verità; dato che ci sono k mentitori alla sua sinistra, ci sono al massimo $k-1$ veritieri alla sua destra insieme con $2019 - k - (k-1) = 2020 - 2 \cdot k$ mentitori; così in totale i mentitori in fila sono almeno $2020 - 2k + k = 2020 - k$. Sia A_m l'ultimo mentitore nella fila (quello con indice massimo, quello più a sinistra se si vuole): ci sono almeno $2020 - 2k + k - 1 = 2019 - k$ mentitori alla sua sinistra e al massimo $k-1$ veritieri alla sua destra; dato che mente, i veritieri alla sua destra sono in numero maggiore o uguale dei mentitori alla sua sinistra, così $2019 - k \leq k - 1$, dunque $k \geq 1010$. $\lightning$
Adesso dimostriamo che i rimanenti 1009 sono veritieri. Sia n un indice con $1011 \leq n \leq 2019$; alla sinistra di A_n ci sono almeno 1010 mentitori e alla sua sinistra ci sono al massimo 1008 veritieri, perciò dice la verità.
Dunque ci sono 1009 veritieri. La risposta è `1009`.

Soluzione del problema 9. È $b_1 = 7$, poi $b_2 = 12$, $b_3 = 15$, $b_4 = 21$, $b_5 = 24$, $b_6 = 31$. Il numero b_6 ha come unità la stessa di b_4. Perciò da qui in avanti tale posizione si alternano i valori 1 e 4. Quindi, per $n \geq 4$

$$b_n = \begin{cases} 10\dfrac{n}{2} + 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 10\dfrac{n-1}{2} + 4 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

dato che $l_u(1) + l_u(4) = 10$. Da ciò $b_{217} = 10 \cdot 108 + 4 = 1084$.
La risposta è `1084`.

Soluzione del problema 10. I passi dell'algoritmo partendo da un numero a dispari, applicati a coppie, producono la successione

$$2a+1 \quad 2^2a+2+1 \quad 2^3a+2^2+2+1 \quad \ldots \quad 2^ka+(2^k-1) \quad \ldots$$

Dato che $8192 = 2^{13}$ è la massima potenza di 2 inferiore a 10000 e $8191 = 2^{13} - 1 = 2^7(2^5 + \ldots + 1) + 2^6 + \ldots + 1$, per massimizzare il valore $2^ka + (2^k - 1) < 10000$ con $a < 100$, deve essere $k = 7$. La condizione equivale a $a < \dfrac{10000 - (2^7 - 1)}{2^7}$ e $\dfrac{10000 - 127}{128} \approx 77.13$.
Perciò la risposta è 76.

La risposta è 0076.

Soluzione del problema 11. Si indichino con A, B, C e D i punti dove stanno Kael, Kale, Kail e Kela, con E e F i punti dove sono Keil e Klea. Si noti che il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Così $\angle ADC + \angle CBA = \angle DAB + \angle BCD = 180°$. Nel triangolo AEB si ha che $\angle EBA = 180° - 5\beth$ visto che $\angle BEA = 2\beth$ e $\angle EAB = 3\beth$. Nel triangolo DFA si ha che $\angle FDA = 180° - 4\beth$ visto che $\angle DAF = 3\beth$ e $\angle AFD = 1\beth$. Perciò

$$\angle ADC + \angle CBA = \angle FDA + \angle EBA = 180° - 5\beth + 180° - 4\beth = 360° - 9\beth = 180°.$$

Quindi $180° = 9\beth$. L'ampiezza in gradi di $1\beth$ è 20.
La risposta è 0020.

Soluzione del problema 12. I numeri a_i, $i = 1, \ldots, 4$ vanno scelti in $U \setminus \{x\}$, che è un insieme con 4 elementi, pertanto le scelte possibili, fissato x, sono $4! = 24$. Se $x = 1$, abbiamo quindi l'addendo $(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)$ ripetuto 24 volte, se $x = 2$ abbiamo l'addendo $(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)$ ripetuto 24 volte, ecc. In totale quindi otteniamo $24(24 - 6 + 4 - 6 + 24) = 960$.
La risposta è 0960.

Soluzione del problema 13. Se $4 \oplus 0 = 4$, allora $4 =$ marrone oppure 4 è secondario. Supponiamo che $4 =$ marrone. Allora $4 \oplus 5 = 4$ ma $4 \oplus 5 = 9$ per ipotesi. $\lightning$
Quindi 4 è secondario derivato di 0. Le condizioni $4 \oplus 5 = 9$ e $4 \oplus 2 = 6$ comportano che $9 =$ marrone e $6 =$ oro oppure $9 =$ oro e $6 =$ marrone. Quindi 3 è secondario e 1 e 2 primari. Quindi i primari sono 0, 1 e 2. Perciò $4 =$ arancione, $9 =$ marrone, $6 =$ oro, $2 =$ giallo, $0 =$ rosso, $1 =$ blu, $3 =$ verde, $5 =$ viola.
La risposta è 5103.

Soluzione del problema 14. Una soluzione intera non può che essere 1 o -1 dato che ogni radice intera di un polinomio monico a coefficienti interi deve dividere il termine noto. L'equazione si può riscrivere come

$$x(x^{10} \bullet x^8 \bullet x^6 \bullet x^4 \bullet x^2 \bullet 1) = \diamond x^{10} \diamond x^8 \diamond x^6 \diamond x^4 \diamond x^2 \diamond 1$$

dove $\diamond$ è il segno opposto di $\bullet$. Si noti che le potenze di x nelle somme nei due membri sono tutte pari.
Si ha che $x = 1$ è soluzione quando la somma dei sei addendi 1 o -1 nella parentesi a primo membro coincide con la somma dei sei addendi a secondo membro, cioè il numero m dei segni $\bullet$ che sono $-$ deve coincidere con il numero dei segni $\diamond$ che sono $+$. Perciò le successioni che producono un'equazione che ha $x = 1$ tra le soluzioni sono

$$\sum_{m=0}^{5} \binom{5}{m}\binom{6}{m} = \binom{11}{5} = 462.$$

In modo simile, $x = -1$ è soluzione quando la somma dei sei addendi 1 o -1 nella parentesi a primo membro è l'opposto della somma dei sei addendi a secondo membro e le successioni che producono un'equazione che ha $x = -1$ tra le soluzioni sono ancora 462.
Però le equazioni in cui le parentesi sono uguali a 0 sono esattamente quelle che hanno radici 1 e -1—il primo membro si scrive $x(x^2-1)(x^8 * x^4 * 1)$ e il secondo membro si scrive $(x^2-1)(\star x^8 \star x^4 \star 1)$ per successioni di segni. Dunque La parentesi a primo membro è 0 quando il numero di $+$ è 2, la parentesi a secondo membro è 0 quando il numero di $+$ è 3: le successioni che determinano una tale situazione sono $\binom{5}{2}\binom{6}{3} = 200$.
Il numero di successioni è $2 \cdot 462 - 200 = 724$.
La risposta è 0724.

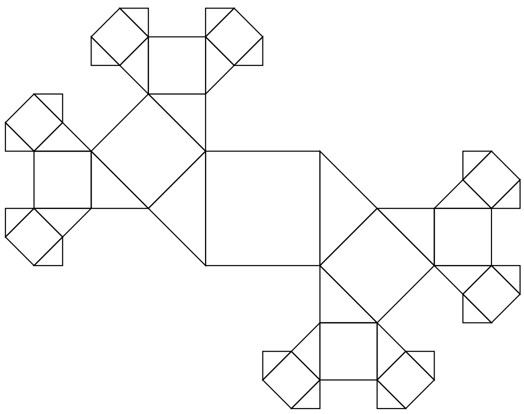
Soluzione del problema 15. È fondamentalmente per forza bruta. La somma massima si ottiene come $\frac{9}{12}+\frac{8}{34}+\frac{7}{56}\approx 1.11029$. Quindi la somma deve essere 1. Si nota però che $68=2\cdot 34$. Dunque si prova $\frac{9}{12}+\frac{7}{34}+\frac{5}{68}=\frac{3}{4}+\frac{19}{68}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{34}$. Ma $\frac{9}{12}+\frac{5}{34}+\frac{7}{68}=1$.
La somma per produrre il risultato richiesto è $12+34+68+1=115$.
La risposta è `0115`.

Soluzione del problema 16. Si considerino gli scarti di Elena come un ordinamento dei quattro semi, gli scarti di Lisandro come una permutazione dell'ordinamento di Elena. Elena vince se la permutazione dell'ordinamento prodotta da Lisandro ha almeno un punto fisso. Il numero di permutazioni senza punti fissi su un insieme di n elementi è calcolato dalla seguente formula per ricorrenza:

$$S_0=1 \qquad S_1=0 \qquad S_{n+2}=(n+1)(S_n+S_{n+1})$$

dove l'ultima formula si calcola considerando separatamente quelle permutazioni dove il primo elemento si scambia con un altro e le altre. Perciò $S_4=3(S_3+S_2)=3(3S_2+S_1)=3^2S_0=9$.
La probabilità di vittoria di Elena è $\frac{24-9}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.
La risposta è `0013`.

Soluzione del problema 17. Prima di iniziare si prende una lunghezza $\ell=15\,\mathrm{mm}$. Dal 1° passo al 3° passo, si "sposta" un segmento tanto quanto la lunghezza presa e si aggiungono 2 lunghezze $\ell\sqrt{2}$. Si ottiene un'aggiunta al perimetro precedente di $2\sqrt{2}\ell$. Si cambia la lunghezza presa con $\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il rapporto tra l'aggiunta al perimetro dopo l'esecuzione dei quattro passi e la lunghezza usata all'inizio dell'esecuzione è $2\sqrt{2}$; il rapporto tra la lunghezza totale dopo l'esecuzione e la lunghezza (totale) prima dell'esecuzione è $\sqrt{2}$.



Perciò, ad ogni esecuzione dei quattro passi, i perimetri variano come segue

$$\begin{cases} p_0=2\ell \\ p_{n+1}=p_n+2\sqrt{2}((\sqrt{2})^n\ell) \end{cases}$$

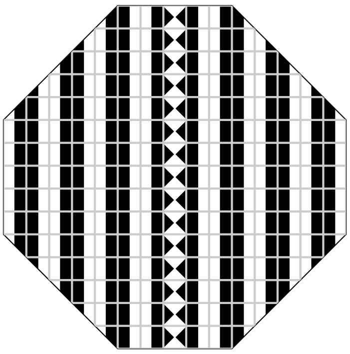
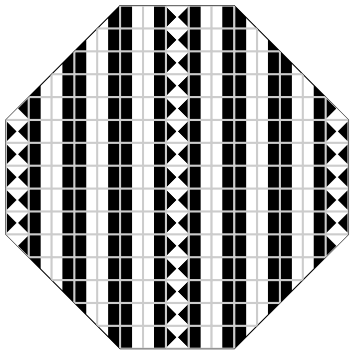
Ne segue che

$$\begin{aligned} p_4 &= 2\ell+\textstyle\sum_{i=0}^{3} 2\sqrt{2}((\sqrt{2})^n\ell)=\left[2+2\sqrt{2}\left(\textstyle\sum_{i=0}^{3}((\sqrt{2})^n\right)\right]\ell \\ &= \left[2+2\sqrt{2}\tfrac{(\sqrt{2})^4-1}{\sqrt{2}-1}\right]\ell=[2+6\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)]\ell=(14+6\sqrt{2})15\,\mathrm{mm}\approx 337.28\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

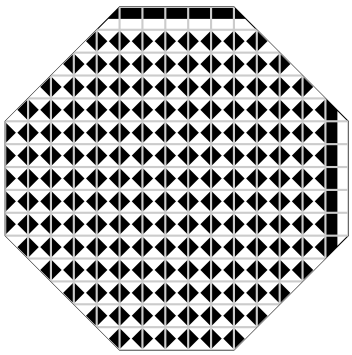
La risposta è `0337`.

Soluzione del problema 18. Ogni quadrato viene ricoperto da quadrati di $5^2=25$ mattonelle. Ciascuno dei quattro triangoli viene ricoperto da 12 mattonelle e mezza, sul

bordo devono comparire 5 metà di mattonella; queste dovranno essere ottenute esattamente da 20 mattonelle. In totale servono 175 mattonelle.
Se si posa una mattonella del secondo tipo con un lato bicolore rivolto verso l'alto (l'altro caso è totalmente simmetrico) allora tutta la colonna di quest'ultima deve essere riempita con mattonelle del secondo tipo perché si devono raccordare bene. Di conseguenza, tutte le mattonelle del secondo tipo sono posate con un lato bicolore rivolto verso l'alto. Inoltre, se si posa una mattonella del secondo tipo accanto a una mattonella del primo tipo, allora la colonna di questa mattonella deve essere ricoperta con mattonelle del primo tipo.
Per trovare il numero massimo di mattonelle del secondo tipo che si riescono a includere nella pavimentazione, supponiamo che tutte le mattonelle, escluse quelle della colonna centrale, siano del secondo tipo, ma si osserva subito che una configurazione del genere non rispetta le regole perchè, rispettando la prima regola, si trova che la configurazione delle mattonelle che sono state tagliate non è compatibile con la seconda regola perché restano quattro metà uguali, come si vede nell'esempio a sinistra in figura:

Quindi si devono utilizzare due colonne e coprirle con le mattonelle del primo tipo: dato che si deve massimizzare l'uso delle mattonelle del secondo tipo si usano mattonelle del primo tipo nelle colonne più corte, cioè quelle estreme a sinistra e a destra. Basta questo per realizzare la seconda regola.
Per quanto riguarda il numero minimo, dato che questo è almeno 1, nella configurazione vi è almeno una colonna di mattonelle del secondo tipo (come abbiamo osservato sopra). Per minimizzare, questa deve essere una delle colonne estreme (che sono con meno mattonelle), ma, se ci fosse solo questa colonna con mattonelle del secondo tipo, come in precedenza non si riesce a soddisfare la seconda regola ed è necessario considerare che anche un'ultima riga sia ricoperta da mattonelle del secondo tipo.



Pertanto il numero cercato è $148 - 12 = 136$.
La risposta è `0136`.

Soluzione del problema 19. Se a un certo momento ci sono n batteri, il giorno successivo ci saranno $n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} \mathrm{mod} 10000$ batteri. Se il numero iniziale è $n = 2500$ si ottiene la sequenza ciclica 2500 6250 4375 2500 . . . Dato che $2019 = 0(\mathrm{mod} 3)$, la risposta è 2500.
La risposta è `2500`.

Soluzione del problema 20. Supponiamo di premere A un numero α di volte e B un numero β di volte. Allora in N_1 compare la cifra $R(2\alpha + \beta, 8)$. Vediamo se tale cifra può

essere 7 (che è il massimo possibile). Gli α e β devono essere tali che $2\alpha+\beta = 7+8a$ (dove a è un qualunque numero intero). Allora α e a possono essere scelti qualunque, basta scegliere $\beta = 7-2\alpha+8a$ e si riesce ad ottenere nel posto N_1 il valore massimo possibile. Dati allora α e β, con $\beta = 7-2\alpha+8a$, vediamo se si riesce ad ottenere in N_2 il valore 3 (che è il massimo possibile). Deve essere $R(\alpha+\beta, 4) = 3$ cioè: $\alpha+7-2\alpha+8a = 3+4b$ (dove b è un intero). Da questa si deduce che per avere 3 in N_2 (e 7 in N_1) deve essere $\alpha = 4c, \beta = 7+8d$ (dove c e d sono numeri interi). Vediamo allora se con questi valori di α e β si riesce ad ottenere in N_3 il valore massimo possibile, che è 9. Deve essere $12c+2(7+8d) = 9+10e$ (con e intero). Pertanto $12c+5+16d = 10e$. Questa uguaglianza non può essere soddistatta perché 5 non è pari. Allora sul display non potrà mai comparire un numero della forma $739\cdots$. Proviamo allora a vedere se può comparire un numero della forma $738\cdots$. Deve essere $12c+2(7+8d) = 8+10e$, cioè $12c+6+16d = 10e$, ossia $6c+3+8d = 5e$, questa uguaglianza dice che $c+3+3d$ deve essere divisibile per 5, cioè $c = -3-3d+5f$. Quindi i valori che si trovano per α e β sono $\alpha = -12-12d+20f$, $\beta = 7+8d$ (con d, f numeri interi). Vediamo se con questi valori di α e β si riesce ad ottenere 9 in N_4. Deve essere $-12-12d+20f+2(7+8d) = 9+10g$, cioè $4d+20f-7 = 10g$ e questo è impossibile, perché 7 non è pari. Vediamo se in N_4 si riesce a mettere la cifra 8: deve essere $-12-12d+20f+2(7+8d) = 8+10g$, cioè $4d+20f-6 = 10g$ da cui si ricava che $2d-3$ deve essere divisibile per 5. Ad esempio $d = 4$ va bene. Per trovare un valore di α basta allora scegliere ad esempio $f = 3$ e si ottiene $\alpha = 0, \beta = 39$ (scegliendo $f = 4$ si ottiene $\alpha = 20, \beta = 39$, che è un'altra delle possibili soluzioni). In conclusione il numero massimo che può comparire sul display è 7388.
La risposta è `7388`.

Soluzione del problema 21. Per il teorema della bisettrice,

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AX} = \frac{EB}{EX}.$$

Perciò $\frac{DB}{BC} = \frac{8}{8+12} = \frac{2}{5}$ e DE e CX sono paralleli; così i triangoli BDE e BCX sono simili e $\frac{DB}{BC} = \frac{DE}{CX}$. Si trova $DE = \dfrac{2}{5}CX = \dfrac{48}{5}$ m. Sapendo che le due bisettrici sono perpendicolari risulta che DE è il diametro della circonferenza; si trova $2r = \dfrac{48}{5}$ m e $r = 48\,\text{dm}$.
La risposta è `0480`.

Soluzione del problema 22. Dimostriamo che tutti i numeri pari maggiori di 7 sono 7-amichevoli. In un gruppo di 8 persone, basta che tutti siano amici di tutti. Per un gruppo di 10 persone, consideriamole disposte su due file da cinque persone: ogni persona nella prima fila è amico con quelli nella seconda e di (altre) due persone nella stessa fila stessa cosa con le persone della seconda fila. Ognuno ha cosí $5+2 = 7$ amici. Per un gruppo di 12 persone, consideriamole disposte su due file di sei persone: ogni persona nella prima fila è amico con quelli nella seconda e di una (altra) persona nella stessa fila; stessa cosa con le persone della seconda fila. Ognuno ha cosí $6+1 = 7$ amici. Per un gruppo di 14 persone, consideriamole disposte su due file da sette persone; ogni persona nella prima fila è amica con tutti quelli nella seconda. Ognuno ha cosí 7 amici. Pertanto, 8, 10, 12 e 14 sono 7-amichevoli. Dato che ogni numero pari maggiore di 14 si scrive come somma di questi quattro numeri, tutti i numeri pari sono 7-amichevoli.
Del resto nessun numero dispari é 7-amichevole dato che il numero di amicizie in un gruppo di n persone in cui ognuno ha sette amici è $\frac{7n}{2}$, dunque n deve essere pari.
La risposta è `1006`.

Soluzione del problema 23. Scriviamo $P(n)$ la proprietà P che il numero naturale n sia uguale al prodotto della somma delle sue cifre e del prodotto delle sue cifre. Supponiamo che n sia un numero di una cifra. Dunque, $P(n)$ è verificata se e solo se $n \cdot n = n$, cioè $n = 0, 1$. Nessuno di questi verifica le altre richieste del problema. Supponiamo che n sia un numero di due cifre, cioè $n = 10a + b$ per opportune cifre $a > 0$ e b. Supposto che $P(n)$ sia verificata, si ha che $ab(a + b) = 10a + b$, in particolare $a \mid b$, diciamo $b = ak$. Dunque

$a^3k(1+k) = a(10+k)$ e $a^2k(k+1) = k+10$. Così $k \mid 10$ e $k+1 \mid (k+10)$, cioè $k+1 \mid 9$. Soltanto $k = 2$ verifica le due condizioni. Ma deve essere anche $6a^2 = 12$. $\lightning$ Supponiamo $n > 99$, cioè $n = 100a + 10b + c$ per opportune cifre $a > 0$, b e c. Supponiamo che $P(n)$ sia verificata. Allora nessuna delle cifre può essere 0. Inoltre $abc(a+b+c) = 100a+10b+c$, cioè $abc^2+[ab(a+b)-1]c-100a-10b = 0$ da cui si ottiene che $d = [ab(a+b)-1]^2+40ab(10a+b)$ deve essere un quadrato perfetto e $c = \dfrac{\sqrt{d} - [ab(a+b)-1]}{2ab}$. Provando con $a = 1$, diventa $d = [b(b+1)-1]^2 + 40b(10+b)$: si ha

per $b = 1$ si ha $d = 441 = 21^2$, così $c = 10$. $\lightning$

per $b = 2$ si ha $d = 985$ che non è un quadrato perfetto

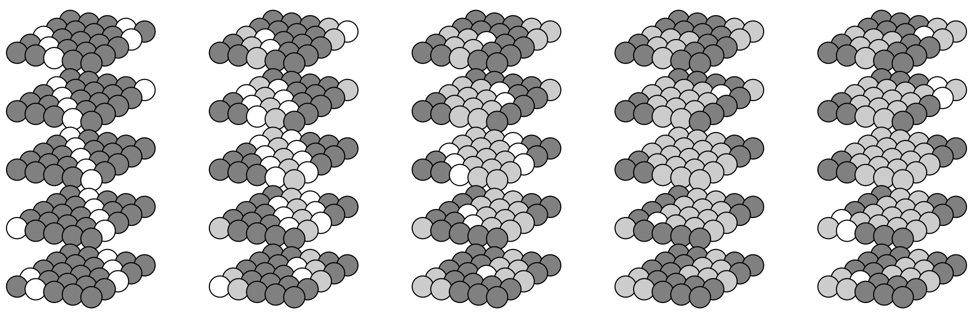
per $b = 3$ si ha $d = 1861 = 41^2$, così $c = 5$.

La risposta è `0135`.

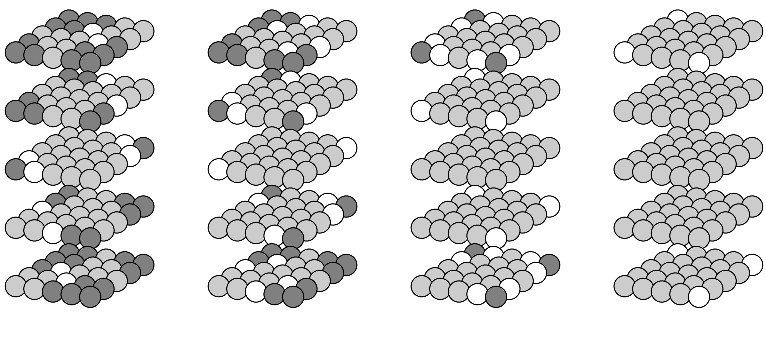
Soluzione del problema 24. Meno di 25 è impossibile. Consideriamo la situazione a un certo punto: ci saranno facce in comune a due cubi accesi, che chiamiamo facce *spente*, e facce appartenenti a un solo cubetto acceso, che chiamiamo facce *accese*. Se inizialmente ci sono n facce accese allora, in qualunque momento, il numero delle facce accese sarà minore di n, infatti al momento di accensione di un cubo almeno tre facce accese si spengono, mentre, al più, ne vengono create altre tre accese. Allora, poiché la superfice laterale totale dell'intero cubo acceso è di 25×6 facce accese, inizialmente servono almeno 25 cubi illuminati (se non sono contigui infatti hanno esattamente 25×6 facce accese). D'altra parte si vede che questa configurazione soddisfa la richiesta: (indicando cubetti di lato unitario con le coordinate del suo vertice più vicino all'origine degli assi)

0 piano:	(2,0,0), (3,1,0), (4,2,0), (0,3,0), (1,4,0)
1 piano:	(1,0,1), (2,1,1), (3,2,1), (4,3,1), (0,4,1)
2 piano:	(0,0,2), (1,1,2), (2,2,2), (3,3,2), (4,4,2)
3 piano:	(0,1,3), (1,2,3), (2,3,3), (3,4,3), (4,0,3)
4 piano:	(0,2,4), (1,3,4), (2,4,4), (3,0,4), (4,1,4)

Le rappresentazioni che seguono mostrano i nove passi richiesti perché, dalla configurazione sopra, si arrivi ad avere tutti i cubetti accesi: per rendere possibile la visualizzazione tridimensionale, i cubetti sono rappresentati con palline; i cinque piani di cubetti sono presentati distanziati, uno sopra l'altro; i cubetti spenti sono colorati in grigio scuro; per indicare i cubetti che si accendono ad un certo passo, quelli già accesi al passo precedente sono colorati in grigio chiaro, quelli che non erano accesi al passo precedente sono colorati in bianco.



Primo passo Secondo passo Terzo passo Quarto passo Quinto passo



Sesto passo   Settimo passo   Ottavo passo   Nono passo

La risposta è `0025`.