XX Gara Nazionale a Squadre

Prima Semifinale – 3 Maggio 2019

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. C'era una volta

C'era una volta... Sì, ma quando esattamente? Per darvi un'idea, c'è un polinomio $p(x)$ non costante con tutti i coefficienti in $\{0, 1, \ldots, 10\}$ e tale che $10 \mid p(11)$ $12 \mid p(13)$ e $18 \mid p(19)$. Bisogna andare indietro di tanti eoni quanto il grado del polinomio. Di quanti eoni come minimo?

2. Il teorema del brutto anatroccolo [$\star\star$]

In un parco a forma di triangolo ABC, con $AC > BC$, vive un anatroccolo; egli ama sguazzare in un lago di forma circolare, la cui sponda passa per A e per i piedi delle altezze uscenti da B e da C. Il lago interseca in un altro punto P la circonferenza circoscritta ad ABC. Se $BC = 3456\sqrt{2}$, $\widehat{BCA} = 27°$ e $\widehat{CAP} = 45°$, quanto dista B dall'ortocentro di ABC?

3. Stecche di cannella

Casa della strega. C'è una cesta con 99 stecche di cannella di lunghezze 2, 3, ..., 100. Ogni giorno Gödel inganna la strega (che crede di tastare il dito di Hensel) usando una delle stecche, diciamo lunga n. Se n è un primo Gödel mangia poi tutta la stecca. Altrimenti ne mangia una parte in modo che la nuova lunghezza $m < n$ sia massima tra quelle non coprime con n e ripone la parte rimanente nella cesta. Per quante volte la strega verrà ingannata?

4. Flauto magico [$\star$]

Il pifferaio di Hamel sapeva attirare una quantità più che numerabile di topi con il suo flauto. Un giorno arrivò in una città dove c'erano 900 topi numerati da 1 a 900, e suonò 900 canzoni. L'n-esima canzone attirava il topo m quando $m \leq n$ e $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$. Per quali n accadeva che la canzone n attirasse un numero di topi che è divisore di n? *Si risponda indicando la somma di tali n.*

5. Specchio parlante [$\star\star$]

Pochi sanno che lo Specchio Parlante funzionava anche da calcolatrice. La Regina un giorno mostrò allo specchio un intero di quattro cifre, e chiese "Specchio, specchio, dalla magia perenne, dimmi la radice quadrata di questo numero N". Della risposta, la regina sentì solo "(brusio) virgola zero uno due tre quattro (brusio)". Quanto vale N?

6. La torre di Raperujan

La torre di Raperujan ha 2020 piani di forma triangolare che si alternano con 2019 di forma circolare. Visto dall'alto ogni piano è contenuto nel piano subito sotto e ne tocca il contorno in tre punti. I piani $2i$, $i = 0, 1, \ldots, 2019$ sono triangoli di vertici A_i, B_i, C_i con A_{i+1} contenuto nel segmento B_iC_i, B_{i+1} nel segmento A_iC_i, e C_{i+1} nel segmento A_iB_i. Il piano terra ($i = 0$) ha angolo $\frac{\pi}{4}$ in A_0. Quanto misura l'angolo in A_{2019} moltiplicato per $\frac{2^{2019}}{\pi}$? *Se il numero è razionale, si dia come risposta la somma del denominatore e della cifra delle unità del numeratore della frazione ridotta ai minimi termini; altrimenti* 9999.

7. I viaggi di Gödeller

Gödeller ha percorso in lungo e in largo la terra (che, si sa, è piatta e triangolare), visitando paesi lontani. La sua mappa è a forma di triangolo equilatero di lato 10, diviso da rette parallele ai lati in 100 triangoli equilateri di lato 1. In ogni viaggio, parte dal triangolino più in alto e arriva al triangolo centrale dell'ultima riga in basso, muovendosi solo tra triangolini aventi un lato in comune, e senza mai visitare più volte lo stesso triangolino né ritornare verso l'alto riattraversando una delle parallele orizzontali. Quanti percorsi diversi può seguire?

8. I tre Bernoullini

I tre Bernoullini si dirigono verso un terreno triangolare ABC. Tracciano una retta ℓ, che interseca AB in N e AC in M. Il quadrilatero $BCMN$ è circoscrivibile a una circonferenza: il primo Bernoullino costruisce allora una capanna di paglia, circolare e inscritta a $BCMN$. Il secondo Bernoullino costruisce una capanna circolare di legno, inscritta ad ANM. Il terzo Bernoullino prolunga il lato BC dalla parte di C, intersecando ℓ in un punto L, e costruisce una capanna circolare di mattoni, inscritta a LMC. Inaspettatamente, la capanna di paglia è tangente alle altre due. Il famelico Mene-lupo si avvicina, e osserva che $\widehat{BAC} = 56°$. Quanto vale $\widehat{BNM}$?

9. Triangoli di fiammiferi [$\star$]

I fiammiferi cadono dalle mani intirizzite della piccola fiammiferaia. In terra formano il seguente disegno: un triangolo ABC con il segmento AD, D un punto sul lato BC. I lati AB e AC misurano rispettivamente 24 e 40 fiammiferi. La piccola osserva che le bisettrici degli angoli $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ACB}$ concorrono su AB, mentre le bisettrici di $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$ concorrono su AC. Mentre si addormenta si chiede: quanto varrà $BD^2 + DC^2$?

10. Il cestino di mele

Cappuc-ceva Rosso vuole portare un cestino di deliziose mele alla nonna. Il suo cestino ha la forma di un cilindro a cui è stato sottratto un cono che ha per base una delle due facce circolari del cilindro e per vertice il centro dell'altra faccia. Il cilindro ha altezza 5 e raggio 12. Le mele sono identiche, di forma perfettamente sferica, e sono tali che se il loro raggio fosse più grande anche di pochissimo non ce ne starebbe neppure una all'interno del cestino. Qual è il massimo volume di mele che è possibile posizionare all'interno del cestino?

11. Un mondo fiabesco

C'erano una volta due regni lontani in uno strano mondo. Ciascun regno era la superficie laterale di uno dei due coni infiniti ottenuti dalla rotazione di una retta attorno a un'altra ad essa incidente. Ogni regno era diviso in regioni, ottenute tagliando questo strano mondo con 70 piani. Quante regioni c'erano al massimo, in tutto?

12. Una briciola d'ingegno [$\star\star$]

L'arbitrariamente piccolo Pollicino attraversa la foresta dal punto di coordinate $(0,0)$ al punto $(504,504)$, facendo 1008 passi di lunghezza 1, tutti paralleli agli assi, ogni giorno tramite una strada diversa per depistare l'Arco Cattivo. Ogni giorno, lungo la strada, Pollicino lascia una briciola di pane ogni volta che passa da un punto (m,n) tale che $n \geq m$ (inclusi il primo e l'ultimo). Un mattino, Pollicino si accorge di aver già percorso tutte le strade disponibili. Quante briciole di pane ha lasciato lungo tutti i percorsi fatti finora? *Si risponda indicando il resto della divisione di questo numero per* 2018.

13. Guidati dalle stelle

"N-esima stella a destra, e poi dritto fino al mattino." Perel Pan sta spiegando come arrivare sull'Isola che non esiste. Aggiunge: "N è un numero naturale minore di 2019. Se definiamo

$$K_N = \sqrt{N + \sqrt{N^2 + \sqrt{N^4 + \sqrt{N^8 + \sqrt{\dots}}}}},$$

si ha che $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot K_N$ è intero." Qual è la somma di tutti i possibili valori di N?

14. Mentre ingrassano

Nella loro prigione di pan di zenzero, Hensel e Gödel passavano il tempo giocando. Gödel parte dicendo un intero N tra 1 e 10000 (estremi inclusi). Poi, a turno, ognuno dei due replica con un numero maggiore di quello appena detto dal suo avversario, secondo queste regole: se il numero è pari, si può scegliere se aumentarlo di due oppure raddoppiarlo; se è dispari, si può scegliere se aumentarlo di tre oppure triplicarlo. Il primo a dire un numero maggiore di 10000 vince. Per quante possibili scelte di N Hensel ha una strategia che gli garantisce la vittoria?

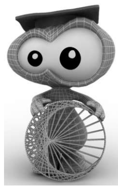
15. Che asino di lupo [$\star$]

Lupo alla porta (con voce mielata): "$p(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$". I sette capretti (in coro): "*mammina, la combinazione per aprire la porta è il resto di* $p(1) - p(2) + p(3) - p(4) + p(5) - \ldots - p(2018) + p(2019)$ *diviso per* 1010." Per loro fortuna il lupo non sa fare il conto (Fiuu...) Qual è la combinazione?

16. Materassi

Il vero motivo per cui la principessa ha dormito male con un *o-piccolo* sotto $n = 2019$ materassi: la somma delle cifre di n è multipla sia di 3 che di 4. Per questo è necessario cambiare il numero n. Per quante scelte di n tra 1 e 2019 vale questa problematica proprietà?

XX Gara Nazionale a Squadre

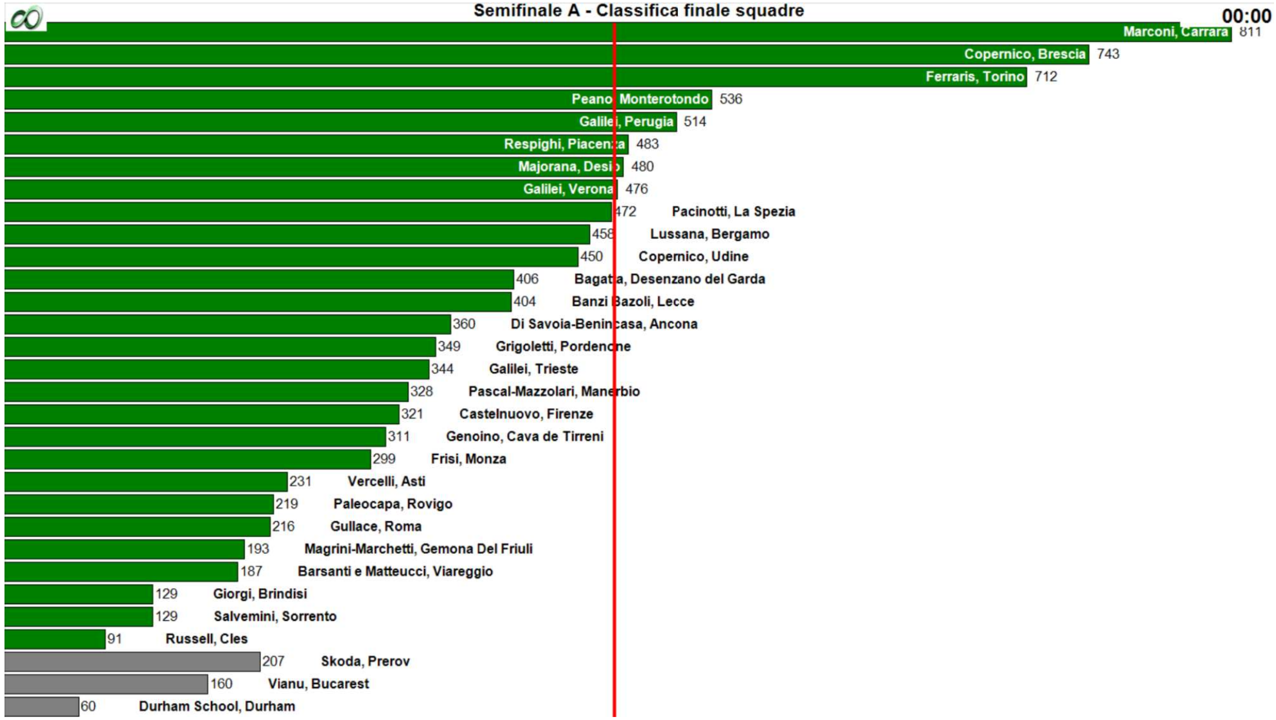


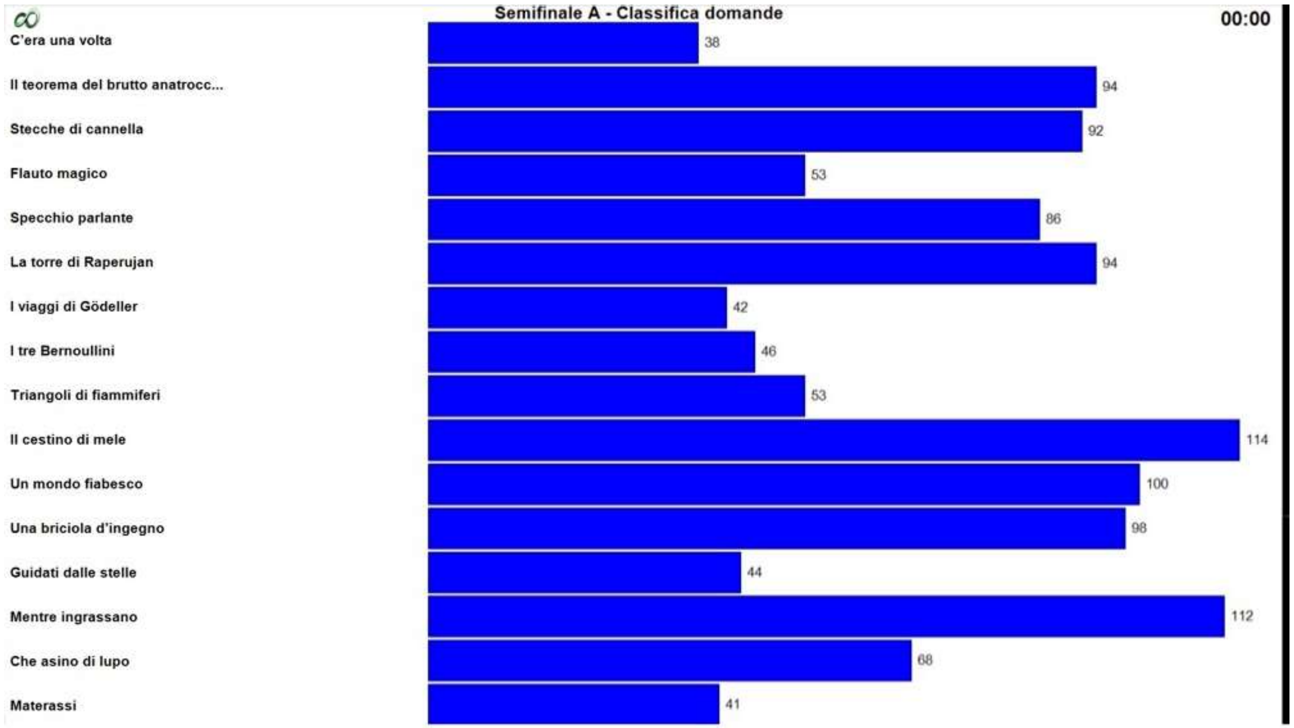
olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Prima Semifinale – Soluzioni –
3 Maggio 2019

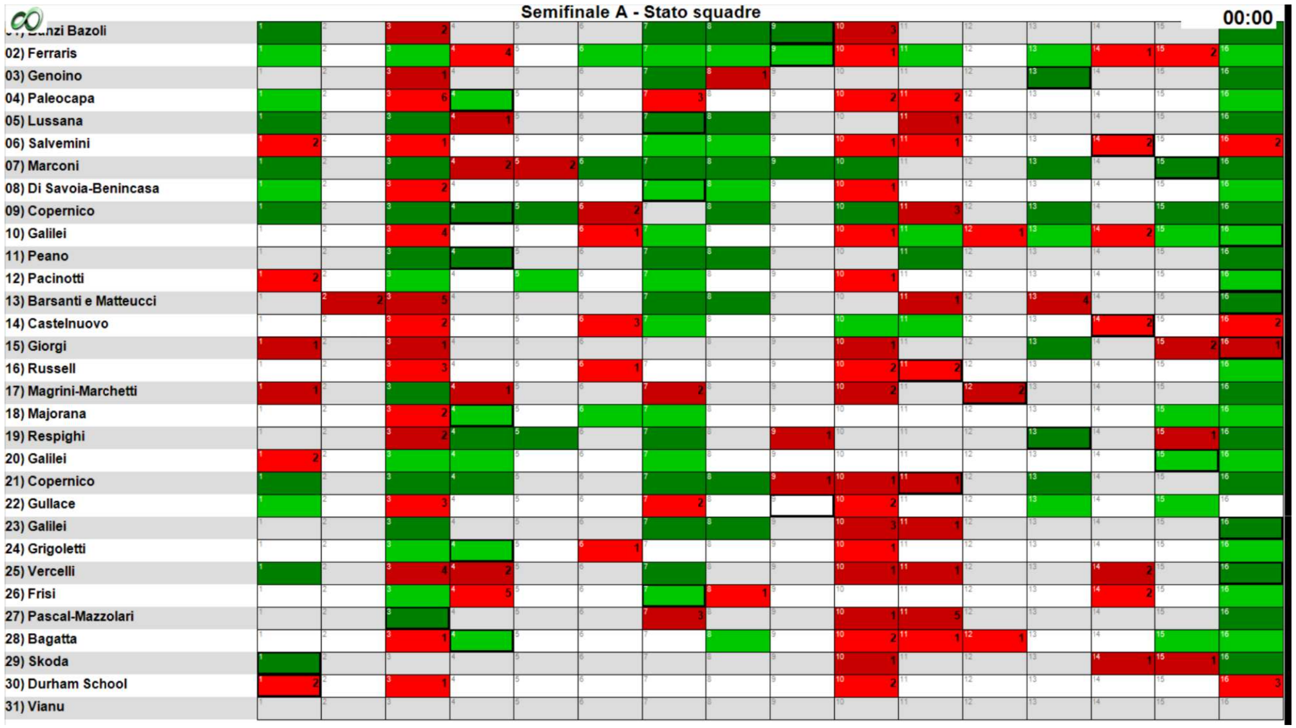
Nr.	Problema	Soluzione
1	C'era una volta	0017
2	Il teorema del brutto anatroccolo [$\star\star$]	1067
3	Stecche di cannella	1995
4	Flauto magico [$\star$]	6981
5	Specchio parlante [$\star\star$]	6563
6	La torre di Raperujan	0005
7	I viaggi di Gödeller	2880
8	I tre Bernoullini	0118
9	Triangoli di fiammiferi [$\star$]	1666
10	Il cestino di mele	0502
11	Un mondo fiabesco	4972
12	Una briciola d'ingegno [$\star\star$]	1514
13	Guidati dalle stelle	9370
14	Mentre ingrassano	8090
15	Che asino di lupo [$\star$]	0006
16	Materassi	0168

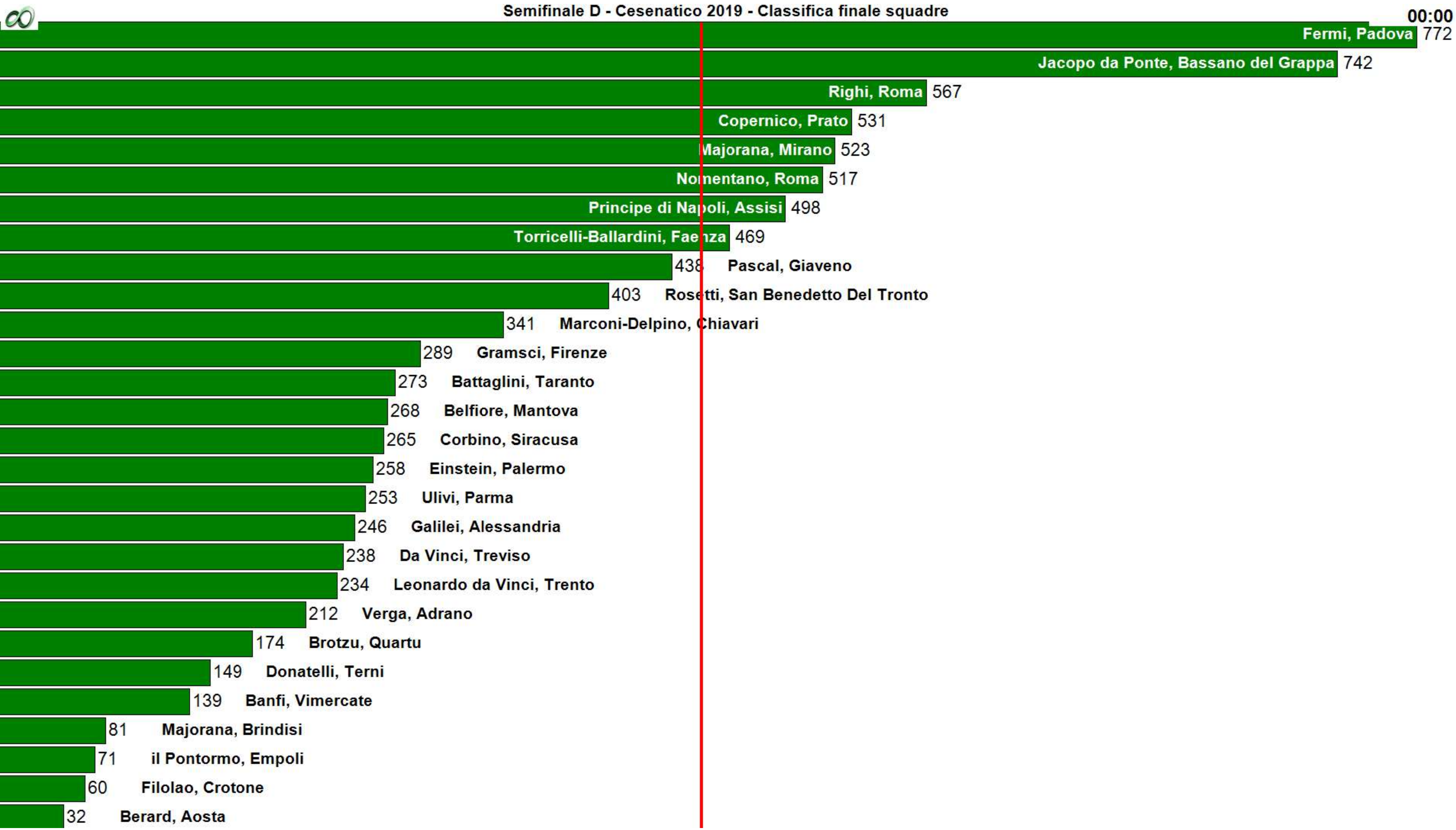
Semifinale A - Classifica finale squadre

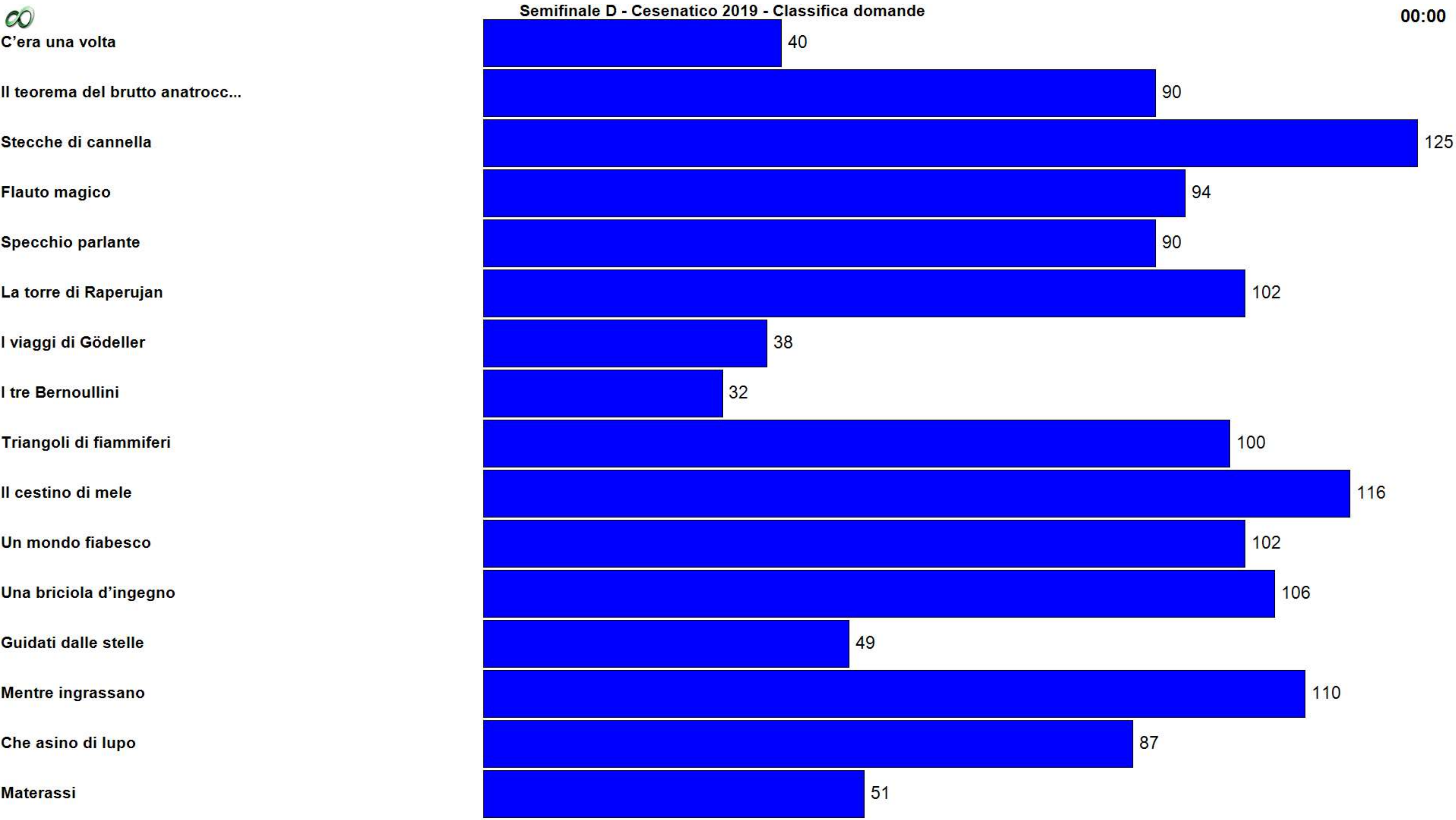




Semifinale A - Classifica domande
00:00
C'era una volta
38
Il teorema del brutto anatrocc...
94
Stecche di cannella
92
Flauto magico
53
Specchio parlante
86
La torre di Raperujan
94
I viaggi di Gödeller
42
I tre Bernoullini
46
Triangoli di fiammiferi
53
Il cestino di mele
114
Un mondo fiabesco
100
Una briciola d'ingegno
98
Guidati dalle stelle
44
Mentre ingrassano
112
Che asino di lupo
68
Materassi
41


Semifinale A - Stato squadre
00:00
02) Ferraris
03) Genoino
04) Paleocapa
05) Lussana
06) Salvemini
07) Marconi
08) Di Savoia-Benincasa
09) Copernico
10) Galilei
11) Peano
12) Pacinotti
13) Barsanti e Matteucci
14) Castelnuovo
15) Giorgi
16) Russell
17) Magrini-Marchetti
18) Majorana
19) Respighi
20) Galilei
21) Copernico
22) Gullace
23) Galilei
24) Grigoletti
25) Vercelli
26) Frisi
27) Pascal-Mazzolari
28) Bagatta
29) Skoda
30) Durham School
31) Vianu


Semifinale D - Cesenatico 2019 - Classifica finale squadre
00:00
Fermi, Padova 772
Jacopo da Ponte, Bassano del Grappa 742
Righi, Roma 567
Copernico, Prato 531
Majorana, Mirano 523
Nomentano, Roma 517
Principe di Napoli, Assisi 498
Torricelli-Ballardini, Faenza 469
438 Pascal, Giaveno
403 Rosetti, San Benedetto Del Tronto
341 Marconi-Delpino, Chiavari
289 Gramsci, Firenze
273 Battaglini, Taranto
268 Belfiore, Mantova
265 Corbino, Siracusa
258 Einstein, Palermo
253 Ulivi, Parma
246 Galilei, Alessandria
238 Da Vinci, Treviso
234 Leonardo da Vinci, Trento
212 Verga, Adrano
174 Brotzu, Quartu
149 Donatelli, Terni
139 Banfi, Vimercate
81 Majorana, Brindisi
71 il Pontormo, Empoli
60 Filolao, Crotone
32 Berard, Aosta

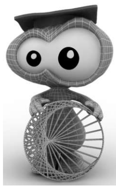

Semifinale D - Cesenatico 2019 - Classifica domande
00:00
C’era una volta 40
Il teorema del brutto anatrocc... 90
Stecche di cannella 125
Flauto magico 94
Specchio parlante 90
La torre di Raperujan 102
I viaggi di Gödeller 38
I tre Bernoullini 32
Triangoli di fiammiferi 100
Il cestino di mele 116
Un mondo fiabesco 102
Una briciola d’ingegno 106
Guidati dalle stelle 49
Mentre ingrassano 110
Che asino di lupo 87
Materassi 51

Semifinale D - Cesenatico 2019 - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Jacopo da Ponte					1					1						
02) Righi				4		1					1	1				
03) Battaglini			3	6				1		2	2					
04) Corbino			8				1			1			1			
05) Fermi						1			2	2				1		
06) Einstein				1				1		1					2	
07) Copernico			1							1						
08) Filolao			2	1			1					2				3
09) Gramsci	1		7				1				1					
10) Majorana			1					2		3	1				2	
11) Da Vinci			2							2				1		
12) Leonardo da Vinci			3									3		1		1
13) Majorana																
14) Principe di Napoli	1										2		1			
15) Verga	1		1				3							1		
16) Brotzu			2													
17) il Pontormo			3		1				4		1					
18) Pascal						2	1		1		2					
19) Nomentano	3									1			2	1		
20) Donatelli	3		4							1						2
21) Rosetti	1					3										2
22) Torricelli-Ballardini										2			1			2
23) Galilei	1		2							1				1		
24) Belfiore			1						2	1						2
25) Marconi-Delpino			3									1		2		
26) Banfi			4									3				
27) Berard			4			2				1	1		3	1		5
28) Ulivi			2				1				1			1		

XX Gara Nazionale a Squadre



olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Seconda Semifinale – 3 Maggio 2019

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Un mondo fiabesco

C'erano una volta due regni lontani in uno strano mondo. Ciascun regno era la superficie laterale di uno dei due coni infiniti ottenuti dalla rotazione di una retta attorno a un'altra ad essa incidente. Ogni regno era diviso in regioni, ottenute tagliando questo strano mondo con 80 piani. Quante regioni c'erano al massimo, in tutto?

2. Stecche di cannella

Casa della strega. C'è una cesta con 98 stecche di cannella di lunghezze 2, 3, ..., 99. Ogni giorno Gödel inganna la strega (che crede di tastare il dito di Hensel) usando una delle stecche, diciamo lunga n. Se n è un primo Gödel mangia poi tutta la stecca. Altrimenti ne mangia una parte in modo che la nuova lunghezza $m < n$ sia massima tra quelle non coprime con n e ripone la parte rimanente nella cesta. Per quante volte la strega verrà ingannata?

3. Mentre ingrassano

Nella loro prigione di pan di zenzero, Hensel e Gödel passavano il tempo giocando. Hensel parte dicendo un intero N tra 1 e 10 000 (estremi inclusi). Poi, a turno, ognuno dei due replica con un numero maggiore di quello appena detto dal suo avversario, secondo queste regole: se il numero è pari, si può scegliere se aumentarlo di due oppure raddoppiarlo; se è dispari, si può scegliere se aumentarlo di tre oppure triplicarlo. Il primo a dire un numero maggiore di 10 000 vince. Per quante possibili scelte di N Hensel ha una strategia che gli garantisce la vittoria?

4. I tre Bernoullini

I tre Bernoullini si dirigono verso un terreno triangolare ABC. Tracciano una retta ℓ, che interseca AB in N e AC in M. Il quadrilatero $BCMN$ è circoscrivibile a una circonferenza: il primo Bernoullino costruisce allora una capanna di paglia, circolare e inscritta a $BCMN$. Il secondo Bernoullino costruisce una capanna circolare di legno, inscritta ad ANM. Il terzo Bernoullino prolunga il lato BC dalla parte di C, intersecando ℓ in un punto L, e costruisce una capanna circolare di mattoni, inscritta a LMC. Inaspettatamente, la capanna di paglia è tangente alle altre due. Il famelico Mene-lupo si avvicina, e osserva che $\widehat{BAC} = 56°$. Quanto vale $\widehat{BNM}$?

5. Il teorema del brutto anatroccolo [$\star\star$]

In un parco a forma di triangolo ABC, con $AC > BC$, vive un anatroccolo; egli ama sguazzare in un lago di forma circolare, la cui sponda passa per A e per i piedi delle altezze uscenti da B e da C. Il lago interseca in un altro punto P la circonferenza circoscritta ad ABC. Se $BC = 3456\sqrt{2}$, $\widehat{BCA} = 27°$ e $\widehat{CAP} = 45°$, quanto dista B dall'ortocentro di ABC?

6. Specchio parlante [$\star\star$]

Pochi sanno che lo Specchio Parlante funzionava anche da calcolatrice. La Regina un giorno mostrò allo specchio un intero di quattro cifre, e chiese "Specchio, specchio, dalla magia perenne, dimmi la radice quadrata di questo numero N". Della risposta, la regina sentì solo "(brusio) virgola zero uno due tre quattro (brusio)". Quanto vale N?

7. Flauto magico [$\star$]

Il pifferaio di Hamel sapeva attirare una quantità più che numerabile di topi con il suo flauto. Un giorno arrivò in una città dove c'erano 1000 topi numerati da 1 a 1000, e suonò 1000 canzoni. L'n-esima canzone attirava il topo m quando $m \le n$ e $\mathrm{MCD}(m,n) = 1$. Per quali n accadeva che la canzone n attirasse un numero di topi che è divisore di n? *Si risponda indicando la somma di tali n.*

8. Il cestino di mele

Cappuc-ceva Rosso vuole portare un cestino di deliziose mele alla nonna. Il suo cestino ha la forma di un cilindro a cui è stato sottratto un cono che ha per base una delle due facce circolari del cilindro e per vertice il centro dell'altra faccia. Il cono ha altezza 9 raggio 40. Le mele sono identiche, di forma perfettamente sferica, e sono tali che se il loro raggio fosse più grande anche di pochissimo non ce ne starebbe neppure una all'interno del cestino. Qual è il massimo volume di mele che è possibile posizionare all'interno del cestino?

9. La torre di Raperujan

La torre di Raperujan ha 2020 piani di forma triangolare che si alternano con 2019 di forma circolare. Visto dall'alto ogni piano è contenuto nel piano subito sotto e ne tocca il contorno in tre punti. I piani $2i$, $i = 0, 1, \ldots, 2019$ sono triangoli di vertici A_i, B_i, C_i con A_{i+1} contenuto nel segmento B_iC_i, B_{i+1} nel segmento A_iC_i, e C_{i+1} nel segmento A_iB_i. Il piano terra ($i = 0$) ha angolo $\frac{\pi}{4}$ in A_0. Quanto misura l'angolo in A_{2019} moltiplicato per $\frac{2^{2019}}{\pi}$? *Se il numero è razionale, si dia come risposta la somma del denominatore e della cifra delle unità del numeratore della frazione ridotta ai minimi termini; altrimenti* 9999.

10. I viaggi di Gödeller

Gödeller ha percorso in lungo e in largo la terra (che, si sa, è piatta e triangolare), visitando paesi lontani. La sua mappa è a forma di triangolo equilatero di lato 11, diviso da rette parallele ai lati in 121 triangoli equilateri di lato 1. In ogni viaggio, parte dal triangolino più in alto e arriva al triangolo centrale dell'ultima riga in basso, muovendosi solo tra triangolini aventi un lato in comune, e senza mai visitare più volte lo stesso triangolino né ritornare verso l'alto riattraversando una delle parallele orizzontali. Quanti percorsi diversi può seguire?

11. C'era una volta

C'era una volta... Sì, ma quando esattamente? Per darvi un'idea, c'è un polinomio $p(x)$ non costante con tutti i coefficienti in $\{0, 1, \ldots, 10\}$ e tale che $10 \mid p(11)$ $12 \mid p(13)$ e $16 \mid p(17)$. Bisogna andare indietro di tanti eoni quanto il grado del polinomio. Di quanti eoni come minimo?

12. Triangoli di fiammiferi [$\star$]

I fiammiferi cadono dalle mani intirizzite della piccola fiammiferaia. In terra formano il seguente disegno: un triangolo ABC con il segmento AD, D un punto sul lato BC. I lati AB e AC misurano rispettivamente 24 e 40 fiammiferi. La piccola osserva che le bisettrici degli angoli $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ACB}$ concorrono su AB, mentre le bisettrici di $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ABC}$ concorrono su AC. Mentre si addormenta si chiede: quanto varrà $BD^2 + DC^2$?

13. Materassi

Il vero motivo per cui la principessa ha dormito male con un *o-piccolo* sotto $n = 2019$ materassi: la somma delle cifre di n è multipla sia di 3 che di 4. Per questo è necessario cambiare il numero n. Per quante scelte di n tra 0 e 2019 vale questa problematica proprietà?

14. Una briciola d'ingegno [$\star\star$]

L'arbitrariamente piccolo Pollicino attraversa la foresta dal punto di coordinate $(0,0)$ al punto $(504, 504)$, facendo 1008 passi di lunghezza 1, tutti paralleli agli assi, ogni giorno tramite una strada diversa per depistare l'Arco Cattivo. Ogni giorno, lungo la strada, Pollicino lascia una briciola di pane ogni volta che passa da un punto (m, n) tale che $n \leq m$ (inclusi il primo e l'ultimo). Un mattino, Pollicino si accorge di aver già percorso tutte le strade disponibili. Quante briciole di pane ha lasciato lungo tutti i percorsi fatti finora? *Si risponda indicando il resto della divisione di questo numero per* 2018.

15. Che asino di lupo [$\star$]

Lupo alla porta (con voce mielata): "$p(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 9x + 11$". I sette capretti (in coro): "*mammina, la combinazione per aprire la porta è il resto di* $p(1) - p(2) + p(3) - p(4) + p(5) - \ldots - p(2018) + p(2019)$ *diviso per* 1010." Per loro fortuna il lupo non sa fare il conto (Fiuu...) Qual è la combinazione?

16. Guidati dalle stelle

"N-esima stella a destra, e poi dritto fino al mattino." Perel Pan sta spiegando come arrivare sull'Isola che non esiste. Aggiunge: "N è un numero naturale minore di 2019. Se definiamo

$$K_N = \sqrt{N + \sqrt{N^2 + \sqrt{N^4 + \sqrt{N^8 + \sqrt{\ldots}}}}},$$

si ha che $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot K_N$ è intero." Qual è la somma di tutti i possibili valori di N?

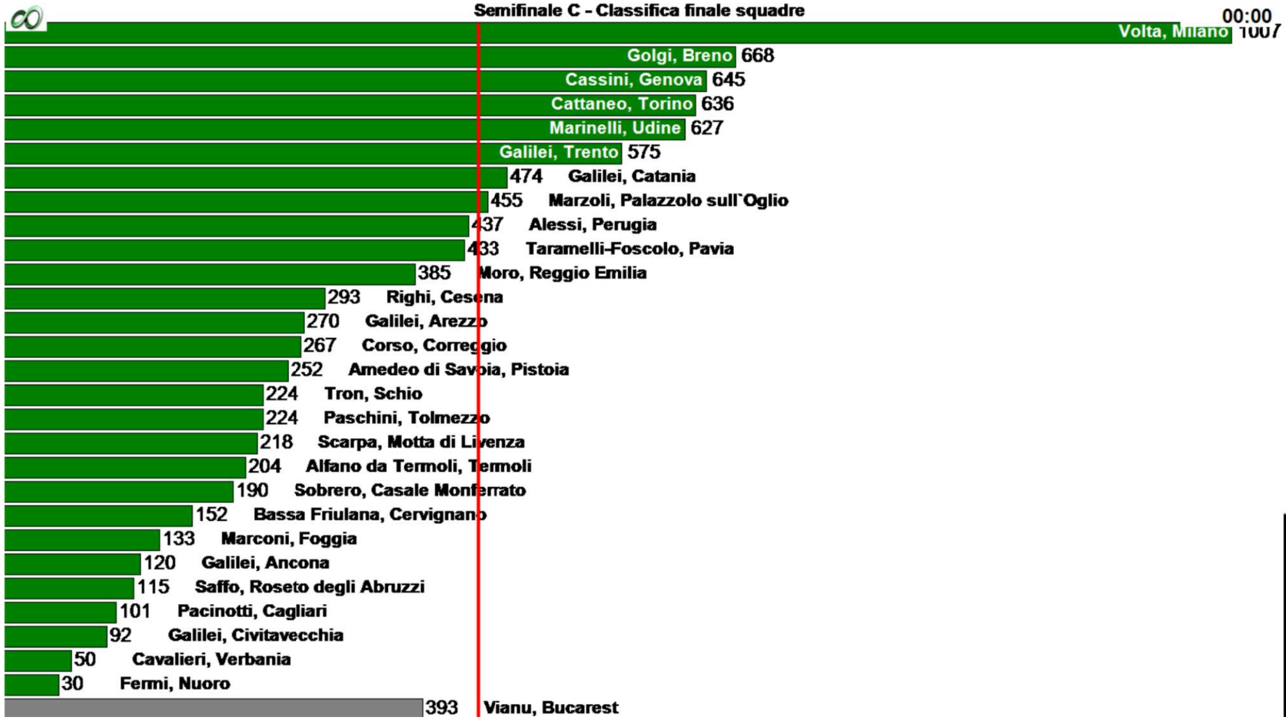
XX Gara Nazionale a Squadre

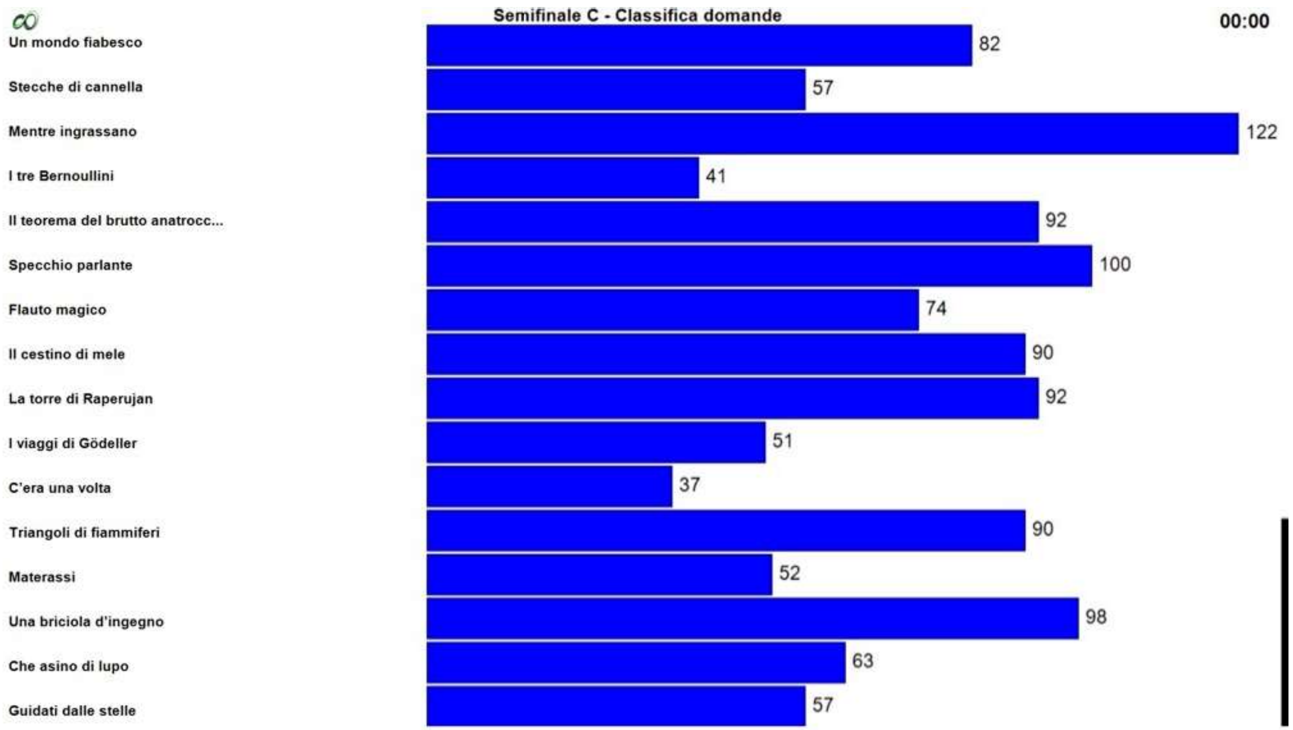
Seconda Semifinale – Soluzioni – 3 Maggio 2019

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Nr.	Problema	Soluzione
1	Un mondo fiabesco	6482
2	Stecche di cannella	1945
3	Mentre ingrassano	1910
4	I tre Bernoullini	0118
5	Il teorema del brutto anatroccolo [⋆⋆]	1067
6	Specchio parlante [⋆⋆]	6563
7	Flauto magico [⋆]	7953
8	Il cestino di mele	7506
9	La torre di Raperujan	0005
10	I viaggi di Gödeller	8800
11	C'era una volta	0023
12	Triangoli di fiammiferi [⋆]	1666
13	Materassi	0169
14	Una briciola d'ingegno [⋆⋆]	1514
15	Che asino di lupo [⋆]	0011
16	Guidati dalle stelle	9370

Semifinale C - Classifica finale squadre





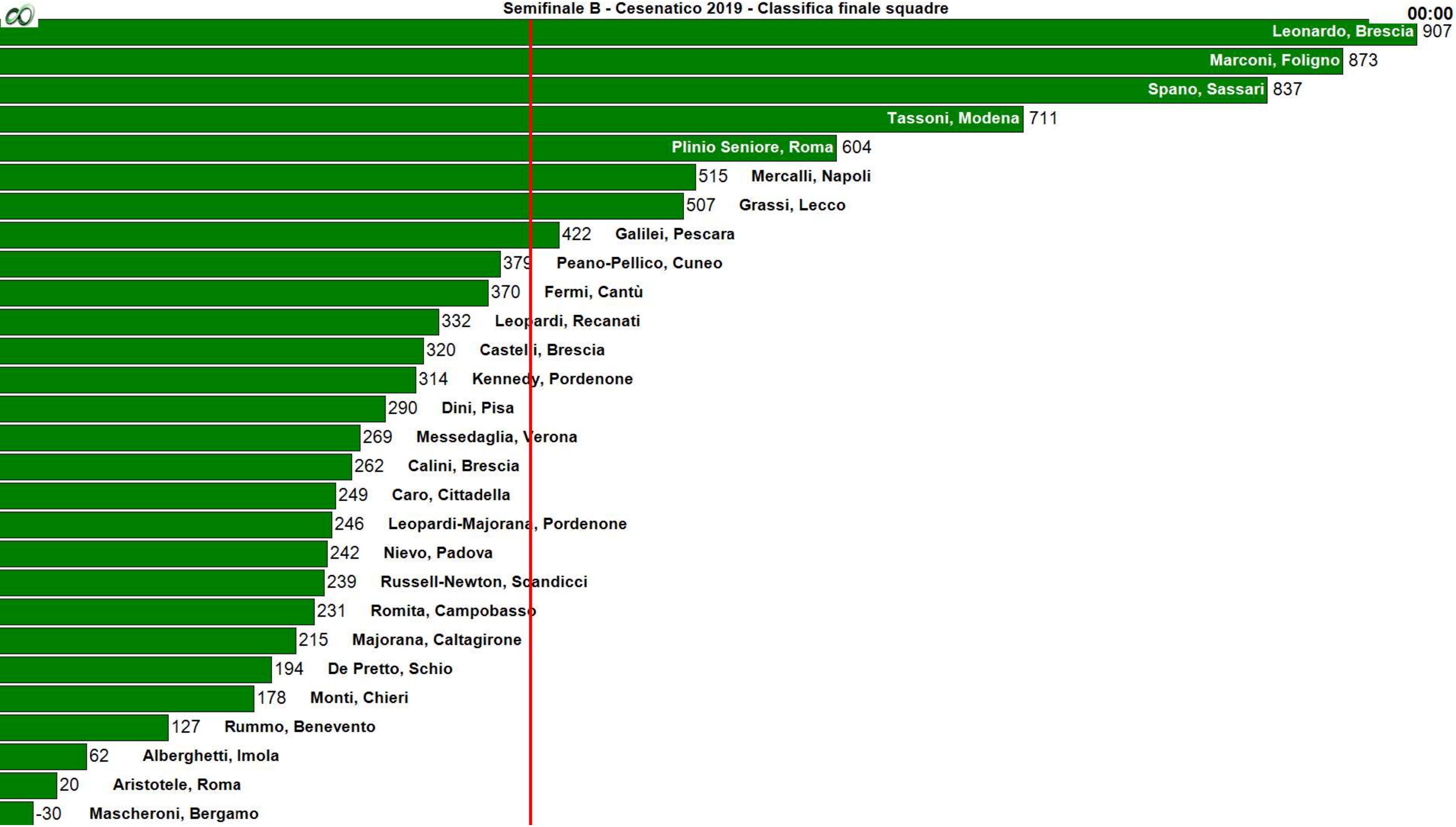
Semifinale C - Classifica domande
00:00
Un mondo fiabesco
82
Stecche di cannella
57
Mentre ingrassano
122
I tre Bernoullini
41
Il teorema del brutto anatrocc...
92
Specchio parlante
100
Flauto magico
74
Il cestino di mele
90
La torre di Raperujan
92
I viaggi di Gödeller
51
C'era una volta
37
Triangoli di fiammiferi
90
Materassi
52
Una briciola d'ingegno
98
Che asino di lupo
63
Guidati dalle stelle
57

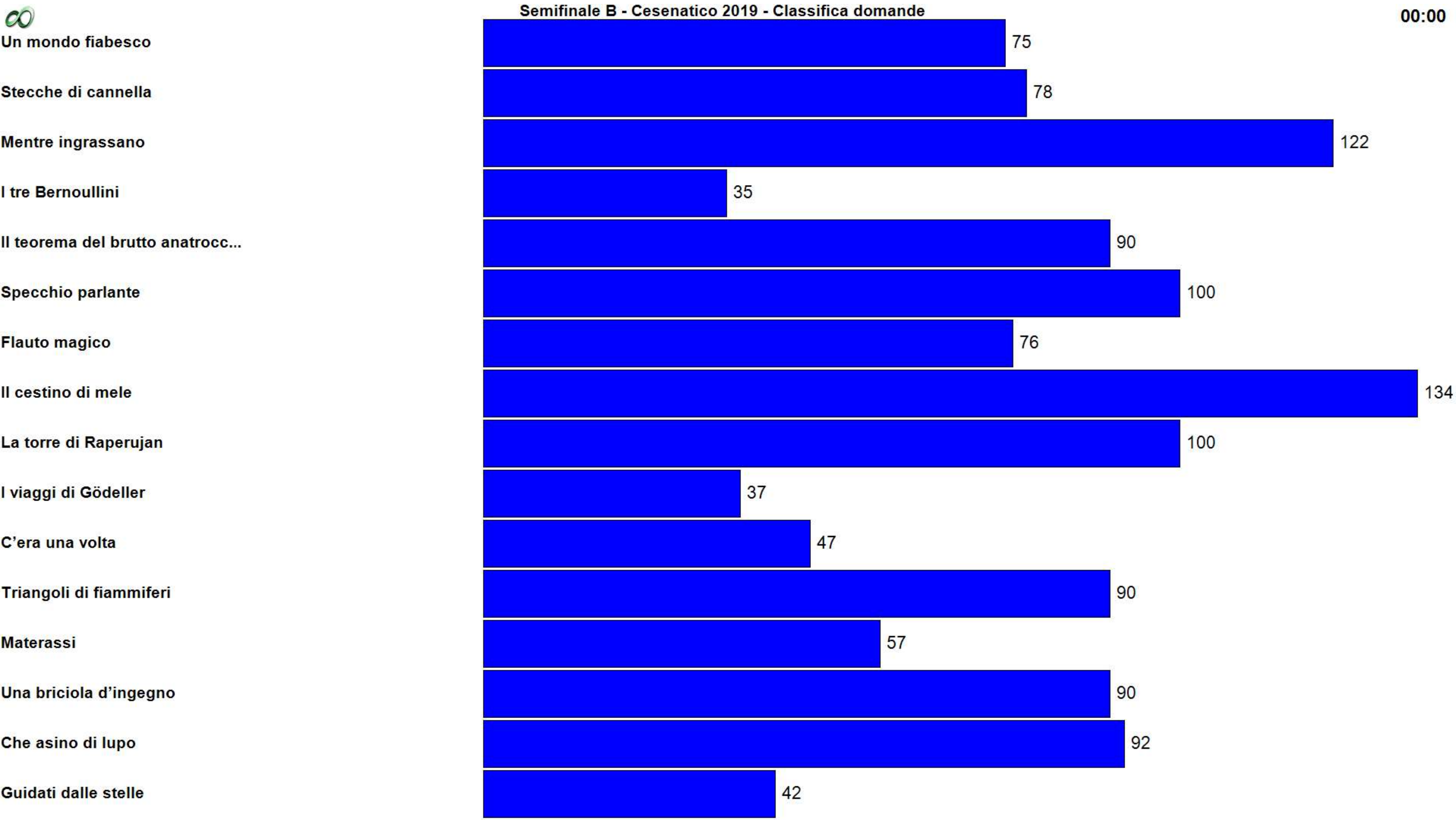
Semifinale C - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Galilei	1							1								
02) Galilei		2	2				3	1								
03) Bassa Friulana		2					2									
04) Fermi		1	3	1						2		2	1		1	
05) Marconi	1	1	1				2						3			
06) Amedeo di Savoia													3		2	1
07) Galilei																
08) Pacinotti		1	2	1				1		1			3	1		
09) Galilei		1	1			1		1	1				3			
10) Cattaneo	1	1						1								
11) Alessi															1	
12) Volta			2				2							1		
13) Cassini		2						1							1	
14) Righi		6									1	1				
15) Alfano da Termoli			1					1					2		1	
16) Galilei			2			1	3						3	2		
17) Scarpa		4	1				2						1			
18) Corso				2			3	2					3			1
19) Saffo	1							1					3	1		
20) Marzoli																
21) Tron		2	1													1
22) Taramelli-Foscolo				1		1										
23) Marinelli			1				1									
24) Moro	1				1					1	1					
25) Paschini	1	5														
26) Golgi																
27) Sobrero	1	2				3		1								
28) Cavalieri	2	3											3			
29) Vianu		6					1				1		2			

Semifinale B - Cesenatico 2019 - Classifica finale squadre





Semifinale B - Cesenatico 2019 - Classifica domande
00:00
Un mondo fiabesco
75
Stecche di cannella
78
Mentre ingrassano
122
I tre Bernoullini
35
Il teorema del brutto anatrocc...
90
Specchio parlante
100
Flauto magico
76
Il cestino di mele
134
La torre di Raperujan
100
I viaggi di Gödeller
37
C'era una volta
47
Triangoli di fiammiferi
90
Materassi
57
Una briciola d'ingegno
90
Che asino di lupo
92
Guidati dalle stelle
42

Semifinale B - Cesenatico 2019 - Stato squadre

00:00

Squadra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Nievo		3	2													
02) Spano			2													
03) Marconi	1			1												
04) Majorana										1			2		1	
05) Grassi			1					2					2			
06) Dini	2	3	1			1		1	3					1		
07) Alberghetti	1	2					2	3	1				4			1
08) Romita			1				3	2								
09) Rummo		3				1		1				1				
10) Leopardi																
11) Caro	1		2				1									2
12) Plinio Seniore								1								
13) Tassoni							1									
14) Mercalli		3						1								
15) Galilei	2							4			1		1			
16) Calini		2					3					4	4	2		
17) Messedaglia			2			1	2		1	1						2
18) Aristotele			1			1	2	3		1			5			
19) Fermi		2							1				3			
20) Russell-Newton							2									
21) Monti		1					1	1					1	1		
22) Leopardi-Majorana			1					2		1						
23) Peano-Pellico		1		1							2	1				
24) Kennedy	1	2									2					
25) De Pretto		1						1				1		1		
26) Leonardo			1			1		3								
27) Castelli			4										3			
28) Mascheroni		3					5	1					5			

XX Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 4 Maggio 2019

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o più stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. C'era una volta

"C'era una volta, in un regno molto, molto lontano. . . " Sì, ma quanto lontano? Per darvi un'idea, detto $f(n)$ il numero di divisori di n maggiori di $1\,000\,000 - n$, il regno dista un numero di miglia pari a $f(600\,000) + f(600\,001) + \ldots + f(1\,000\,000)$. Quante miglia è lontano il regno molto, molto lontano?

2. Rana che salta

Nella palude dove vive Šrech ci sono 30 ninfee, disposte a formare una griglia 6×5. Un giorno Šrech nota una rana che saltella sulle ninfee, partendo dalla casella in basso a sinistra. Ogni volta che salta atterra in un'altra ninfea, non necessariamente adiacente, che non si trova in una colonna più a sinistra né in una riga più in basso di quella precedente. In quanti modi diversi può raggiungere la ninfea in alto a destra?

3. Freccia prismica [$\star$]

Per attaccare la casa di Šrech un villico è dotato di frecce magiche la cui punta ha la forma di un prisma retto triangolare con tutti gli spigoli di 1 centimetro, mentre l'asta ha spessore trascurabile e giace sull'asse del prisma. La punta si avvicina al muro, spesso 1 metro, a velocità 300 metri al secondo perpendicolarmente ad esso e compie una rotazione completa rispetto al suo asse ogni 0.2 millisecondi. Passando attraverso il muro il proiettile perfora tutto ciò che tocca senza essere rallentato. Quanti centimetri cubici misura il foro?

4. Personaggi fantastici e dove catturarli

Lord Farquaday ha messo una taglia sui personaggi fantastici: la sua grida comincia con "pollicino: 1 doblone, campanellino: 2 dobloni", e così via, fino a "ciclope: 1000 dobloni", con tutti i numeri tra 1 e 1000 che compaiono una e una sola volta. Accortosi però che i suoi forzieri non consentono questa spesa, vuole appellarsi a un cavillo: ogni ricompensa n verrà letta nella più piccola base B_n in cui essa ha senso. Per esempio, il numero 243 va letto in base 5, e corrisponde (riletto in base 10) a 73 dobloni. Per alcuni numeri n della grida, accade che $B_n \neq 10$ e il numero $10 + B_n$ divide il numero n quando quest'ultimo viene letto sia in base B_n che in base 10. Trovare la somma di tali n.

5. Lo sanno anche gli asini [$\star$]

"Ma questo asino parla!" "Non solo parlo, ma so anche qual è il primo intero n di 3 cifre per cui la quantità $\binom{n}{14}\binom{n}{15}\binom{n}{16}\binom{n}{17}$ sia un quadrato perfetto!" dice Cauchino, scappando per evitare di essere consegnato alle guardie. E Peanocchio (che stava origliando): "Anch'io lo so!" e improvvisamente il suo naso si allunga. . . Qual è il numero di cui parla Cauchino?

6. Piove sulla palude

Notte. Nel sogno di Cauchino le gocce di pioggia diventano schizzi di fango a forma di $\times$ e di $\circ$ che riempiono completamente tante griglie immaginarie 3x3 con cinque '$\times$' e quattro '$\circ$'. "Uno, due, tre, . . . ": Cauchino sta contando nel sonno le varie configurazioni finali. Quante ce ne sono a meno di rotazioni e riflessioni dello schema?

7. Strano disegno[$\star\star$]

Arrivati a Moduloc, Šrech nota subito due cose molto strane: la prima è che non c'è nessun abitante nei dintorni, e la seconda è che i tombini riportano una decorazione molto strana. Si tratta di un triangolo ABC, inscritto in una circonferenza Γ, e altre due circonferenze ω_1 e ω_2, tangenti entrambe internamente a Γ ed esternamente al lato BC. Inoltre ω_1 tange BC nel piede D della bisettrice uscente da A, mentre ω_2 tange BC nel simmetrico di D rispetto al punto medio di BC. "Cauchino, smettila di cantare e guarda qui: se tracciamo un segmento da A tangente a ω_1 misura 2018, mentre se lo tracciassimo tangente a ω_2 misurerebbe 2019!" Quanto vale il quadrato della differenza tra le lunghezze di AB e di AC?

8. L'uomo nell'alto castello

Lord Farquaday ha progettato un nuovo castello, con la forma di un enorme cubo di lato 24, da costruirsi con due tipi diversi di marmo. Detto A uno dei vertici, B, C, D quelli ad esso adiacenti, ed E quello opposto, si sezionano con un piano gli spigoli AB, AC ed AD, in modo che i punti di intersezione, X, Y e Z rispettivamente, soddisfino $AX = 6$ e $AY = AZ = 8$. Il tetraedro $EXYZ$ dev'essere composto di marmo azzurro, mentre la parte rimanente di marmo bianco. Quant'è il volume del marmo azzurro necessario a costruire il castello? Lord Farquaday è a *corto* di idee...

9. Combattimento parimpari

Šrech si trova circondato dai cavalieri di Lord Farquaday, in un punto P all'interno di un ring a forma di quadrilatero convesso $ABCD$. Il primo cavaliere si trova nel punto $X_0 = B$; il secondo in un punto Y_0 sul lato BC tale che $BY_0 = \frac{1}{2}BC$; il terzo in un punto Z_0 su lato CD tale che $CZ_0 = \frac{1}{3}CD$, il quarto in un punto W_0 sul lato DA tale che $DW_0 = \frac{1}{4}DA$, il quinto in un punto X_1 sul lato AB tale che $AX_1 = \frac{1}{5}AB$, il sesto su un punto Y_1 appartenente a BC tale che $BY_1 = \frac{1}{6}BC$, e così via ciclicamente. Shrek, che è un Arco ma non è per nulla stupido, ha calcolato che le aree di X_0PY_0B, di Y_0PZ_0C e di Z_0PW_0D valgono rispettivamente 881, 1539, e 1989. Quanto vale l'area dell'insieme di punti che stanno all'interno di tutti i quadrilateri della forma W_nPX_nA, per ogni n intero non negativo?

10. Sogni di cubi, quadrati, e bolle di sapone

Da piccola, Fibona si immaginava il futuro a fare matematica, insieme a un principe azzurro bellissimo, alto, nobile, e con una medaglia Fields. Riempiva le pagine del suo diario con disegni di bolle di sapone ed equazioni. Su una pagina, aveva scritto l'equazione $p^2q - 11 = 4(p + q^3)$. E, cosa curiosa, il suo diario era composto da p fogli prima di quello con l'equazione, e q dopo di esso, dove p e q sono due numeri primi che soddisfano l'equazione. Da quanti fogli al massimo era composto il diario (senza dimenticare quello contenente l'equazione)?

11. Polinomio esponenziale [$\star$]

Nella lunga attesa del principe che la liberi, la principessa Fibona è riuscita a trovare una formula per calcolare quanti giorni ancora dovrà aspettare. Basta calcolare le ultime quattro cifre di $p(2019)$, dove $p(x)$ è il polinomio a coefficienti reali di grado 2018 tale che $p(n) = n \cdot 3^n$ per ogni $n = 0, 1, \ldots, 2018$. Quanti giorni dovrà ancora aspettare Fibona?

12. Archi e cipolle

"Vedi, Cauchino, gli Archi sono come le cipolle." "Sniff... puzzano?" "Sì... no!" "Ah, ti fanno piangere?" "No! Strati! Le cipolle hanno gli strati. Gli Archi hanno gli strati e le cipolle hanno gli strati. Capito?! Tutti e due abbiamo gli strati!" esclama Šrech affettando una cipolla con $2^{2019} \cdot 5^2$ strati. Sapendo che ogni tipo di cipolla ha un certo numero positivo di strati, e che per ogni tipo di cipolla con $n > 1$ strati esistono due cipolle (eventualmente dello stesso tipo) il cui numero di strati somma n, quanti tipi diversi di cipolla esisteranno come minimo?

13. Il ponte sulla lava

Per arrivare al castello della Draghessian, l'unico modo è attraversare uno dei due ponticelli di legno sospesi su un lago di lava. I ponti partono da due punti B e C, sono entrambi di lunghezza 1000 e terminano nello stesso punto A. Sotto i ponti si intravede un pilastro di roccia, posto nell'incentro I di ABC. Šrech e Cauchino stanno attraversando il ponte che si estende da C. "Non guardare giù, Cauchino! Piuttosto, guarda a sinistra: si vede l'inizio dell'altro ponte, B, che è in direzione esattamente perpendicolare al ponte che stiamo attraversando!" dice Šrech per cercare di tranquillizzare il suo compagno di viaggio. "Almeno Šrech, dimmi se abbiamo già attraversato metà del ponte!" "Non è difficile rispondere: il punto medio del ponte si riconosce perché da esso passa la circonferenza per A, B e I!" Quanta strada manca per giungere alla fine del ponte?

14. Due catene per un drago [$\star\star$]

Le due catene a cui è legata Draghessian sono molto strane: gli estremi X e Y scorrono rispettivamente, senza toccarne gli estremi, sui lati AB di lunghezza 60 e BC di lunghezza 70 di un triangolo ABC con angolo di 75 gradi in B. Le catene non hanno lunghezza fissa, ma si allungano o si accorciano a formare due lati di un triangolo equilatero XYP, di cui Draghessian è il terzo vertice P, posizionato sempre dalla parte opposta a B rispetto alla retta XY. Ci chiediamo qual è l'area della regione in cui può trovarsi Draghessian al variare di X e Y.

15. Giocare con il fuoco [⋆]
Cauchino, per distrarre la Draghessian mentre Šrech salva Fibona, le insegna un gioco. Funziona così: disegna sul muro uno schema con delle caselle disposte a forma di triangolo, con 7 caselle nella riga in alto, 6 in quella sotto, e così via fino ad avere una sola casella in fondo. Riempie poi la riga in alto con numeri interi da 0 a 7 in modo che la loro somma sia 7, e completa lo schema scrivendo in ogni casella la somma dei numeri scritti nelle due immediatamente sopra, come nel triangolo di Tartaglia. Poi si annota il numero scritto in fondo, cancella i numeri dello schema e ricomincia con una nuova configurazione iniziale. Lo scopo del gioco è scoprire quanto vale la somma di tutti i numeri annotati, dopo aver completato gli schemi con tutte le configurazioni possibili della prima riga. Purtroppo per Cauchino, la Draghessian ha già capito quanto vale questa somma...

16. Passatempi per la strada
Nel viaggio di ritorno dalla tana della Draghessian, accompagnati da momenti romantici e canzoni rock, Šrech e Fibona passavano il loro tempo giocando con delle pedine su un'enorme scacchiera $n \times n$. Le pedine possono fare due tipi di mosse: o spostarsi in alto di 7 caselle e a destra di 2, oppure spostarsi in alto di 2 caselle e a destra di 7. In entrambe le mosse, una pedina che esce dal bordo della scacchiera rientra nel bordo opposto come se la scacchiera continuasse periodicamente: cioè, la pedina si muove da (x, y) a $(x+2, y+7) \mod n$, o $(x+7, y+2) \mod n$. Fibona nota che la dimensione n della scacchiera è il più grande numero minore di 9000 (che non sia multiplo di 2 né di 7) tale che una pedina può raggiungere con mosse successive esattamente un quinto delle caselle. Qual è questo numero n?

17. Squallida bettola
Gli avventori della locanda *The Poisson Apple* sono dei tipi poco raccomandabili, e spesso scoppiano delle risse. La locandiera ha comprato sei boccali per la birra, ma sa che ogni volta che scoppia una rissa uno dei boccali potrebbe essere distrutto. La probabilità che questo avvenga è dell'n per cento, dove n è il numero di boccali ancora intatti. In media, quante risse saranno avvenuta quando tutti i boccali sono distrutti?

18. Codici a barre [⋆⋆⋆]
Ognuna delle pozioni prodotte dalla fabbrica della Fata Matrice è contrassegnata da un codice composto da quattro interi positivi a, b, c, d; ogni singola pozione prodotta deve avere un codice diverso da tutte le altre già esistenti. Inoltre, per controllo, ha un codice a barre che riporta il numero razionale $1/(a^2 + b^3 + c^8 + d^n)$. L'intero positivo n, uguale per tutte le pozioni, è stato scelto accuratamente, in modo che, non importa quante pozioni verranno prodotte e con quali numeri di codice, la somma dei numeri scritti su tutti i codici a barre non potrà mai superare un certo intero M. Quanto vale n al minimo?

19. Pozioni mancanti [⋆⋆]
Nel magazzino della Fata Matrice stanno 2019 pozioni, numerate da 1 a 2019. Per controllare che siano tutte, la Fata ha l'abitudine di contarle: per ogni modo possibile di scegliere 1009 pozioni tra quelle presenti, calcola il prodotto dei loro 1009 numeri; poi somma tra loro tutti i prodotti ottenuti. Il Gatto con gli Ordinali ha rubato la numero 253, la pozione *Asintoticamente Felici e Contenti*; mentre lo faceva, però, sono cadute a terra e si sono rotte anche la pozione numero 2018 e la numero 2019. La Fata Matrice gira tra gli scaffali, esegue il calcolo in base alle regole dette sopra, e nota che qualcosa non va perché ottiene una somma diversa da quella abituale: qual è l'insolito risultato che ha ottenuto? *Si risponda indicando il resto ottenuto dividendo il risultato per* 2017.

20. I bottoni nuovi di Tan-di-zero
Tan-di-zero si è rifatto il guardaroba e ora ha $p(2019)$ bottoni gommosi, dove $p(x)$ è un polinomio i cui coefficienti sono interi compresi tra -19 e 19. Sapreste dire quanti bottoni ha, sapendo che $p(91) = 745\,381$?

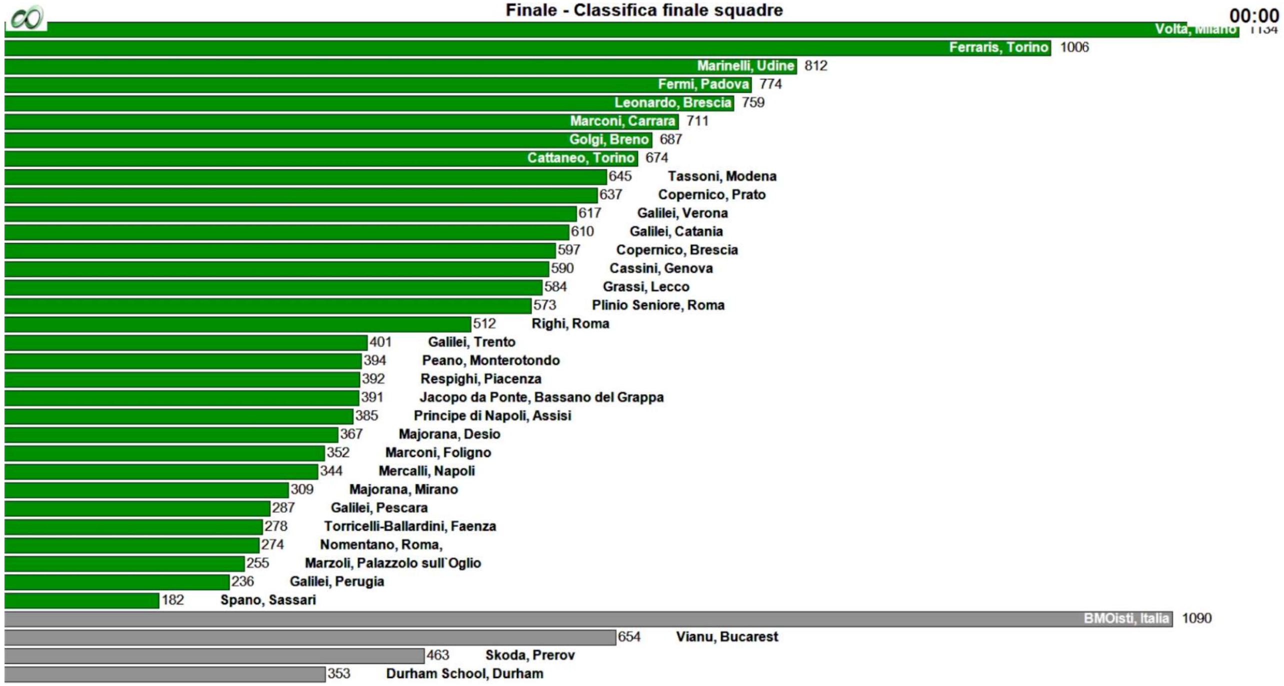
21. Proprio all'ultimo binomiale
Lord Farquaday ha fretta di completare il matrimonio con Fibona, per conquistare il più *alto* titolo di principe. La cerimonia, però, si dilunga, perché il rito prevede di chiedere "Chi ha qualcosa in contrario, pronunci la somma di tutti gli esponenti dei fattori primi distinti che compaiono nella fattorizzazione del minimo comune multiplo tra $\binom{99}{1}, \binom{99}{2}, \ldots, \binom{99}{99}$, oppure taccia per sempre." Il celebrante ha appena finito di dire il penultimo numero $\binom{99}{98}$, quando Šrech irrompe nella chiesa: "*Fermi* tutti! Io so quanto vale questa somma! E non solo, ma amo anche la principessa di vero amore!" Quanto vale quella somma?

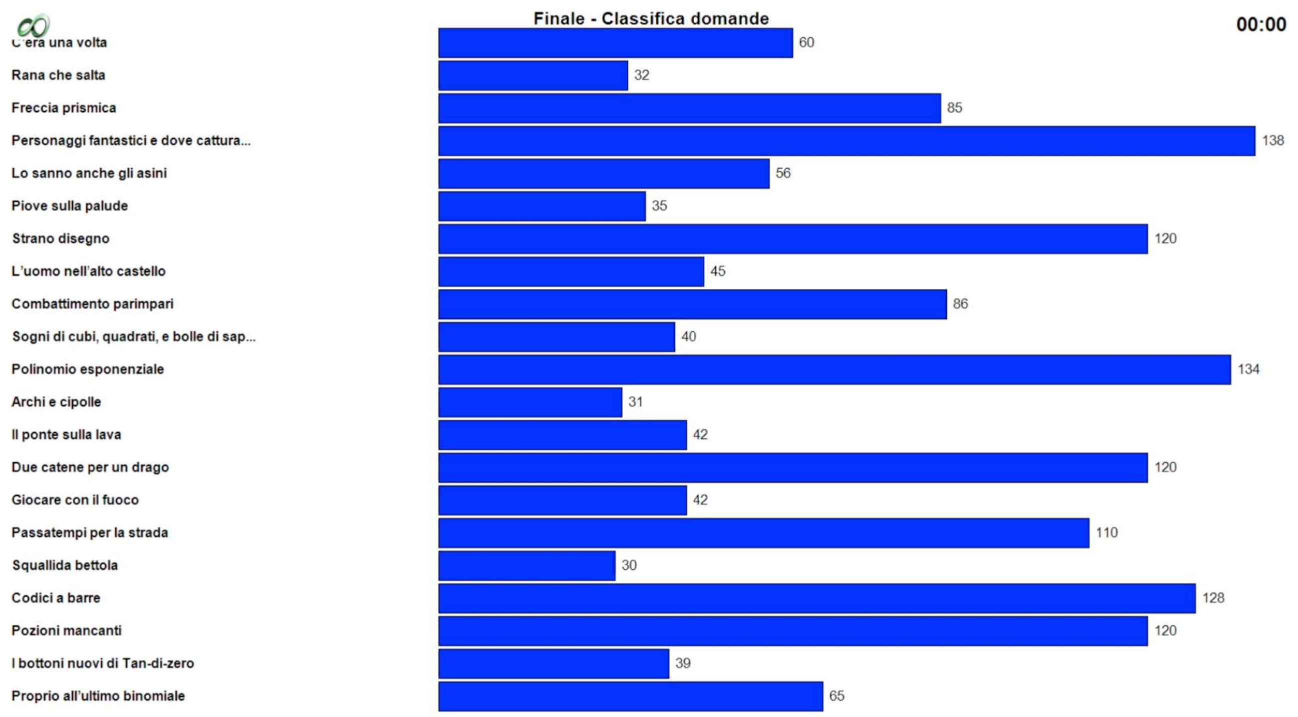
XX Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Soluzioni – 4 Maggio 2019

Nr.	Problema	Soluzione
1	C'era una volta	0001
2	Rana che salta	8016
3	Freccia prismica [$\star$]	0081
4	Personaggi fantastici e dove catturarli	2160
5	Lo sanno anche gli asini [$\star$]	0526
6	Piove sulla palude	0023
7	Strano disegno[$\star\star$]	4037
8	L'uomo nell'alto castello	0576
9	Combattimento parimpari	2019
10	Sogni di cubi, quadrati, e bolle di sapone	0011
11	Polinomio esponenziale [$\star$]	5665
12	Archi e cipolle	2026
13	Il ponte sulla lava	0875
14	Due catene per un drago [$\star\star$]	2969
15	Giocare con il fuoco [$\star$]	9824
16	Passatempi per la strada	8975
17	Squallida bettola	0245
18	Codici a barre [$\star\star\star$]	0025
19	Pozioni mancanti [$\star\star$]	1764
20	I bottoni nuovi di Tan-di-zero	8517
21	Proprio all'ultimo binomiale	0031

Finale - Classifica finale squadre




Finale - Classifica domande
00:00
C'era una volta
60
Rana che salta
32
Freccia prismica
85
Personaggi fantastici e dove cattura...
138
Lo sanno anche gli asini
56
Piove sulla palude
35
Strano disegno
120
L'uomo nell'alto castello
45
Combattimento parimpari
86
Sogni di cubi, quadrati, e bolle di sap...
40
Polinomio esponenziale
134
Archi e cipolle
31
Il ponte sulla lava
42
Due catene per un drago
120
Giocare con il fuoco
42
Passatempi per la strada
110
Squallida bettola
30
Codici a barre
128
Pozioni mancanti
120
I bottoni nuovi di Tan-di-zero
39
Proprio all'ultimo binomiale
65

Finale - Stato squadre

00:00