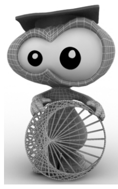
XIX Gara Nazionale a Squadre



olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Semifinale A – 4 Maggio 3018

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o due stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Il telefono di DOC

Sull'elenco telefonico Matryx HOMFLY trova il numero di $\widehat{DOC}$: esso è pari a $(1)+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+1918)$. Quante cifre ha?

2. Fuga dalla piazza

Matryx deve fuggire sullo skateboard da Biff e dai suoi scagnozzi! Ora si trova al centro della piazza di Hill Valley, che è una scacchiera quadrata di 13 caselle per lato, e deve raggiungerne una qualunque casella del bordo nel modo più rapido possibile, cioè ad ogni passo deve spostarsi su una casella che si trova su una corona quadrata (centrata nel punto di partenza) più grande. Inoltre, non avendo il suo skateboard volante, può spostarsi solo tra caselle con almeno un vertice in comune. Con quanti percorsi distinti può scappare da Biff?

3. Paradosso!

Sulla lavagna di $\widehat{DOC}$ sta scritto un insieme A di 100 interi distinti. Tra i suoi appunti per costruire la macchina del tempo, egli annota "ci sono esattamente N interi diversi che si possono scrivere come $b+c$, dove $b,c \in A$". Matryx, però, è andato nel passato e ha modificato alcuni di questi numeri, cambiando il continuum spazio-temporale. Di conseguenza, anche il valore di N è cambiato! Se $N_{\max}$ e $N_{\min}$ sono, rispettivamente, il massimo e il minimo valore di N ottenibile in questo modo, quanto vale $N_{\max} - 2N_{\min}$? *Nota: b e c possono anche essere lo stesso numero.*

4. Cruscotto complicato

Sul cruscotto della DeuLerean c'è uno schermo digitale che è in grado di raffigurare una sequenza di interi non negativi. Non appena $\widehat{DOC}$ ha terminato la sua costruzione, compare una sequenza costituita dal solo numero 100. Ad ogni viaggio nel tempo, questa sequenza viene sostituita da una nuova, secondo questa regola: per ogni $k \geq 0$, il $(k+1)$-esimo termine della nuova sequenza è pari al numero di volte che il numero k compare nella vecchia. La nuova sequenza ha lunghezza pari al massimo numero che compare nella vecchia sequenza, più uno. Per esempio, se la vecchia sequenza fosse $(10,2,0,2)$, la nuova sarebbe $(1,0,2,0,0,0,0,0,0,0,1)$. Dopo 2018 viaggi nel tempo, quanto vale il terzo numero (da sinistra) della sequenza visualizzata?

5. Flusso geometrizzatore [$\star$]

"Grande Gauss! I raggi nel flusso geometrizzatore creano sempre figure strane, Matryx!" dice $\widehat{DOC}$. "Oggi formano due triangoli T_1 e T_2, con i lati a due a due paralleli, parzialmente sovrapposti in modo da intersecarsi in un esagono $ABCDEF$, la cui area è la metà di quella di T_1, e anche i $\frac{49}{72}$ di quella di T_2. Inoltre $AB = 4DE$. Ora, Matryx, sai dirmi quanto vale $\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA}$?" *Si scriva il risultato come una frazione ridotta ai minimi termini, e si risponda indicando la somma tra numeratore e denominatore.*

6. Coppie al ballo

Al cerimoniale ritmico "Incentro isogonale" ci sono 2430 ragazzi, numerati da 1 a 2430, e alcune ragazze, numerate con degli interi positivi tutti distinti. Se un ragazzo e una ragazza hanno i numeri rispettivamente a e b tali che $\mathrm{mcm}(a,b) > \mathrm{mcm}(a,2431)$, allora i due danzeranno insieme sulle note di Johnny B. Goodel. "Che bello —commenta la giovane Lorraine Bayes— il mio numero è il più piccolo tra quelli che permettono ad una ragazza di ballare!"

Che numero ha?

7. Indovinelli dal passato [$\star\star$]

Nel 1955 Matryx riceve la lettera di $\widehat{DOC}$ dal vecchio West, la quale recita così "Ci sono tante miniere, ognuna indicata da un intero. La DeuLerean si trova in quella che corrisponde al numero di coppie *non ordinate* di polinomi $p(x), q(x)$ a coefficienti interi *strettamente positivi*, di grado 4, tali che $p(1)+q(1)=26$ e che il polinomio $(p(x)q(x))^7$ abbia esattamente un coefficiente dispari". Di quale miniera si tratta?

8. La teoria dei futuri astronauti [$\star\star$]

Matryx e $\widehat{DOC}$ sono finiti nell'antico Egitto, dove per nascondere la DeuLerean costruiscono un'enorme piramide retta con base un quadrato $ABCD$ e vertice V. Sugli spigoli VB e VD prendono rispettivamente due punti P e Q con $\frac{BP}{PV}=\frac{DQ}{QV}$ tali che il piano APQ divide la piramide in due stanze di egual volume. Quanto vale $\frac{BP}{PV}$? *Si risponda indicando $a+b+2c$, dove a, b, c sono interi tali che $\frac{BP}{PV}=\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, e b non ha quadrati perfetti tra i suoi divisori.*

9. Banditi matematici [$\star$]

"Whisky per i miei n uomini!" tuona Bu4 Kampen nel saloon. "E quanti sono?" chiede il barista. "Ti dirò solo che n è un intero positivo con esattamente 12 divisori positivi $1=d_1<d_2<\cdots<d_{12}=n$, e che $d_{d_4-1}=d_8(d_1+d_2+d_4)$". Non volendo fare altre domande, per ogni possibile n il barista prepara un vassoio con n bicchieri. Quanti bicchieri riempie?

10. Occhio al cappello [$\star$]

Nel selvaggio West, gli indiani hanno infilzato di frecce il cappello da cowboy di $\widehat{DOC}$. Le frecce hanno tutte la punta nello stesso punto al centro del cappello, e hanno la forma di segmenti tutti della stessa lunghezza. Matryx nota che esistono tre frecce a, b, c tali che l'angolo tra a e b è di 60°, quello tra b e c è di 60°, quello c e a è di 90°. Invece $\widehat{DOC}$, matematico più abile, nota che per ogni coppia di frecce s e t c'è anche una freccia che è la simmetrica di t rispetto al piano perpendicolare a s. Quante frecce ci sono nel cappello, al minimo?

11. Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matematica [$\star$]

Ad ogni edizione delle Olimpiadi di Matematica, a partire dalla numero zero, Biff Tauber scommette sul vincitore grazie al Grande Almanacco. La vincita che ottiene all'edizione n è di a_n dollari, dove $a_0=0$, e per ogni intero n valgono le relazioni $a_{3n}=a_n$, $a_{3n+1}=a_n-1$, e $a_{3n+2}=a_n+2$. Finita l'edizione numero 2018, Biff realizza che, dall'inizio delle scommesse, ha guadagnato una montagna di dollari. Quanti, di preciso?

12. Circuiti difettosi

I circuiti del tempo sono stati danneggiati da un fulmine: ora la DeuLerean può raggiungere solo gli anni di quattro cifre tali che la cifra delle migliaia sia maggiore o uguale alla somma delle altre tre. "Poco male" dice $\widehat{DOC}$, e calcola rapidamente in quanti anni diversi può viaggiare. Che numero trova? *Si intende che un numero di quattro cifre ha la cifra delle migliaia non nulla.*

13. Salviamo l'orologio della torre [$\star$]

Nel 2018 l'orologio di Hill Valley è stato finalmente ricostruito: ora consiste di un triangolo isoscele ABC rettangolo in C. I punti D ed E, rispettivamente sui lati AC e CB, sono congiunti da un segmento parallelo ad AB. Ci sono ora ben due orologi circolari, uno inscritto al triangolo ADE e uno inscritto ad ABE, che si toccano in un punto sul segmento AE. Quanto vale $2000\cdot\dfrac{CE}{CB}$?

14. Apertura quasi automatica

Per sbloccare la porta della sua futura abitazione, Jensenfer Paerther deve trovare tre naturali a, b, c di rispettivamente tre, due e una cifra, con $b=\dfrac{a}{c}$. Inoltre le cifre di b sono contenute in quelle di a, che è il massimo possibile. Quanto vale a? *Il contenimento delle cifre è inteso con molteplicità, cioè ad esempio 32 è contenuto in 243 ma 33 non lo è.*

15. Un fisico bestiale

$\widehat{DOC}$ ha lasciato il fedele EisEinstein in un recinto extratemporale, che nelle dimensioni spaziali è un triangolo ABC con gli angoli in A, B, C di rispettivamente 50, 60, 70 gradi. Detti H il piede dell'altezza uscente da B e K il punto su AB con $AH=AK$, una recinzione rettilinea perpendicolare ad AB congiunge K al segmento BH, che interseca in P. EisEinstein, dotato di grande senso fisico, stima immediatamente l'ampiezza in gradi di $\widehat{PAK}$: che valore trova?

16. Una chitarra particolare

Per provare il nuovo amplificatore di $\widehat{DOC}$ Matryx suona una strana chitarra: essa è formata da un rettangolo $ABCD$ con $AB>BC$ e da un triangolo ABP, con P che si trova sia nella striscia individuata dalle rette BC e DA sia nel semipiano individuato da AB che non contiene il lato CD. Chiamando X e Y le intersezioni di AB con rispettivamente PD e PC, la somma delle aree dei triangoli PAX e PBY è di $71\,\text{cm}^2$, mentre l'area di $ABCD$ è $354\,\text{cm}^2$. Quanti cm^2 vale l'area di $CYXD$?

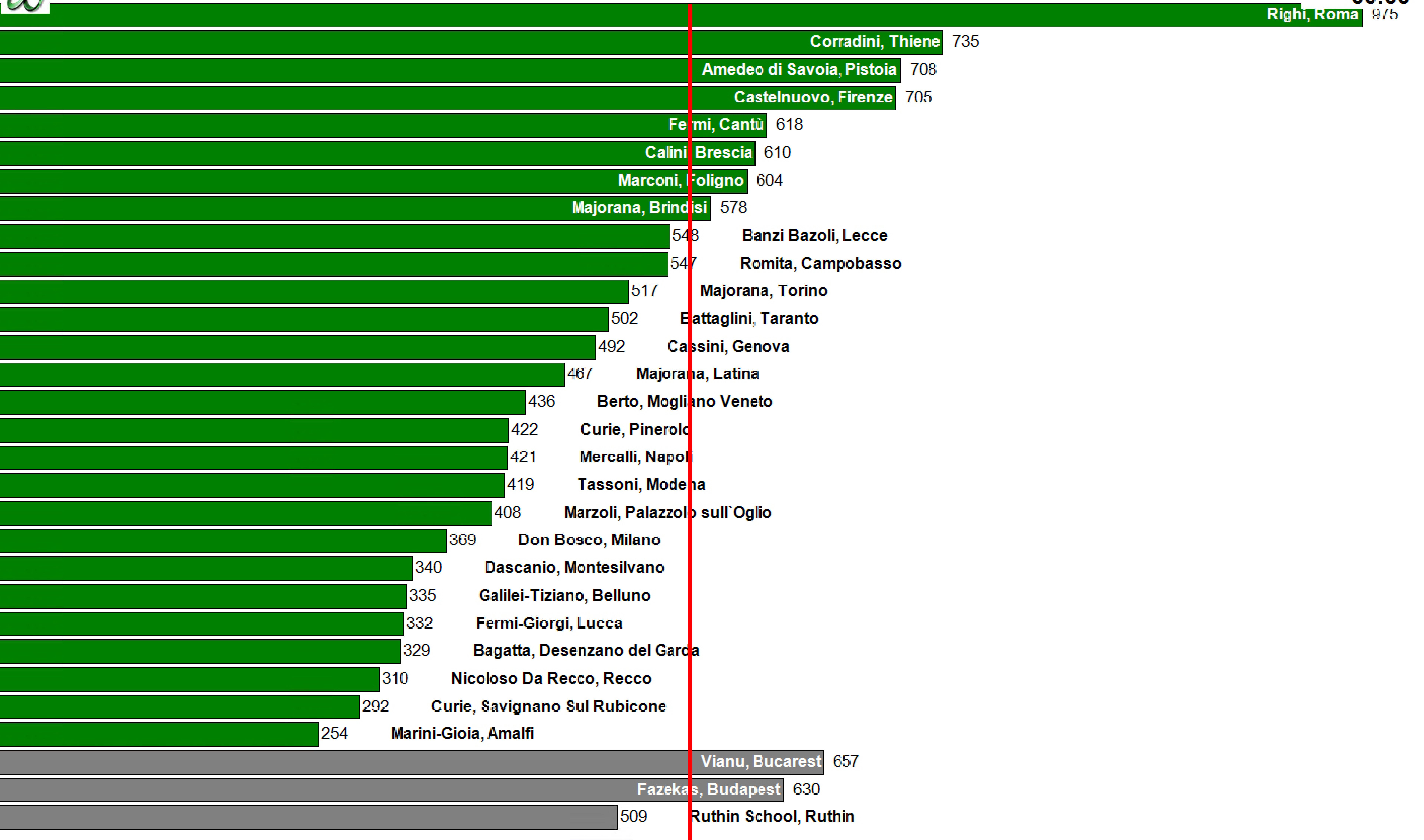
XIX Gara Nazionale a Squadre

Semifinale A – Soluzioni – 4 Maggio 3018

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

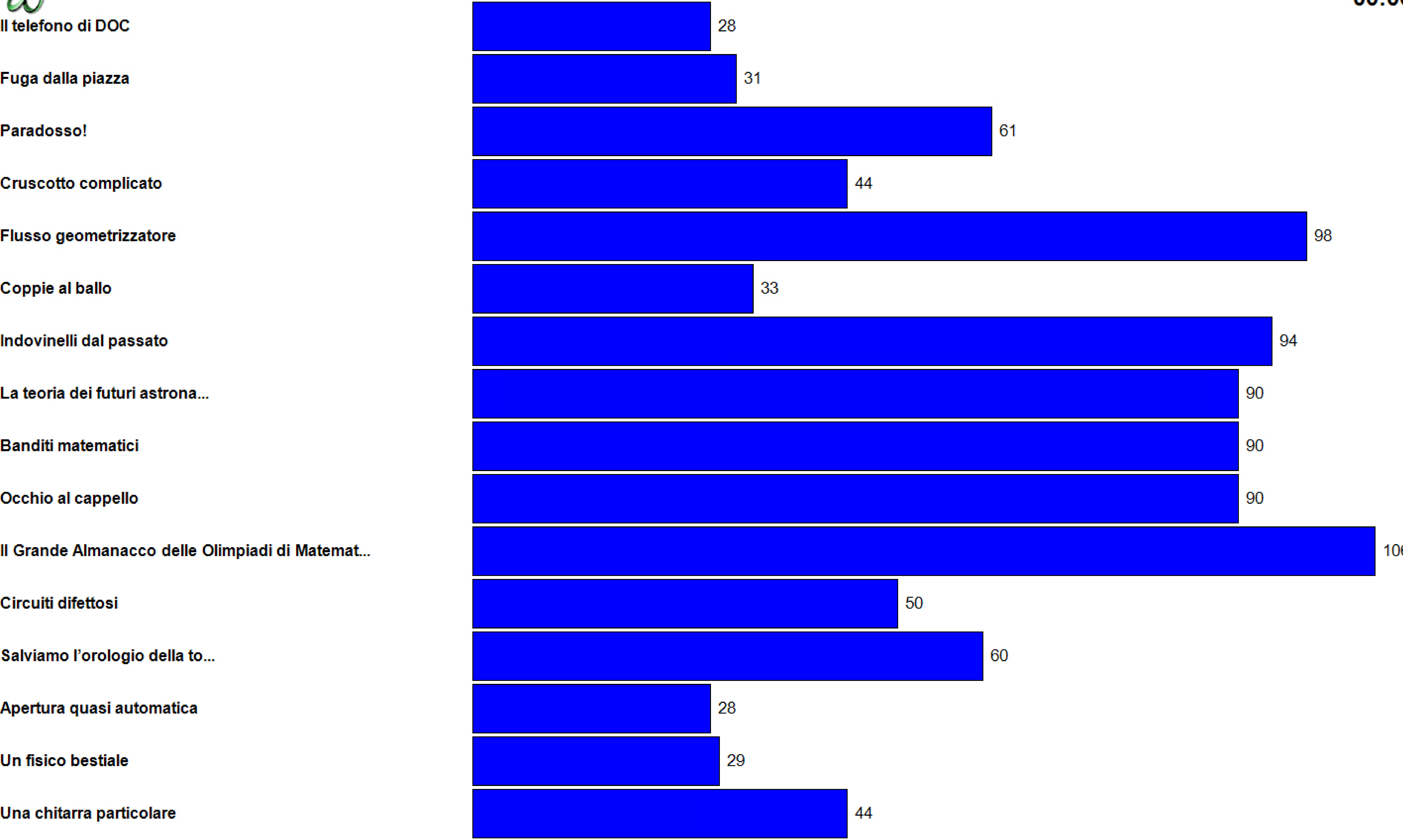
Nr.	Problema	Soluzione
1	Il telefono di DOC	0010
2	Fuga dalla piazza	2912
3	Paradosso!	4652
4	Cruscotto complicato	0001
5	Flusso geometrizzatore[$\star$]	0103
6	Coppie al ballo	0012
7	Indovinelli dal passato [$\star\star$]	8975
8	La teoria dei futuri astronauti [$\star\star$]	0022
9	Banditi matematici [$\star$]	1989
10	Occhio al cappello [$\star$]	0012
11	Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matematica [$\star$]	4105
12	Circuiti difettosi	0714
13	Salviamo l'orologio della torre [$\star$]	0343
14	Apertura quasi automatica	0819
15	Un fisico bestiale	0025
16	Una chitarra particolare	0248

Cesenatico 2018 Semifinale A - Classifica finale squadre



Cesenatico 2018 Semifinale A - Classifica domande

00:00



Cesenatico 2018 Semifinale A - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Calini											1					
02) Tassoni											1	3	1			
03) Cassini			1							1			1			
04) Fermi																
05) Banzi Bazoli			1		1					1						
06) Corradini										1						
07) Galilei-Tiziano		2														
08) Curie			1		1						1					
09) Majorana											1					
10) Righi							2		1		1					
11) Amedeo di Savoia											1					
12) Battaglini											1					
13) Mercalli			1								3					
14) Marini-Gioia			3								2				1	
15) Fermi-Giorgi	1		1													
16) Dascanio			1								1					
17) Castelnuovo											1					
18) Marconi																
19) Majorana			1		1								2			
20) Romita											1					
21) Curie						1					1	2				
22) Bagatta			2								8					1
23) Nicoloso Da Recco		1	1									3				
24) Don Bosco		3			1						1					
25) Majorana																
26) Berto											1					
27) Marzoli									1							
28) Ruthin School					1		2	1			4					
29) Fazekas											4					
30) Vianu		2		4												

Semifinale B - Cesenatico 2018 - Classifica finale squadre

00:00

Semifinale B - Cesenatico 2018 - Classifica domande

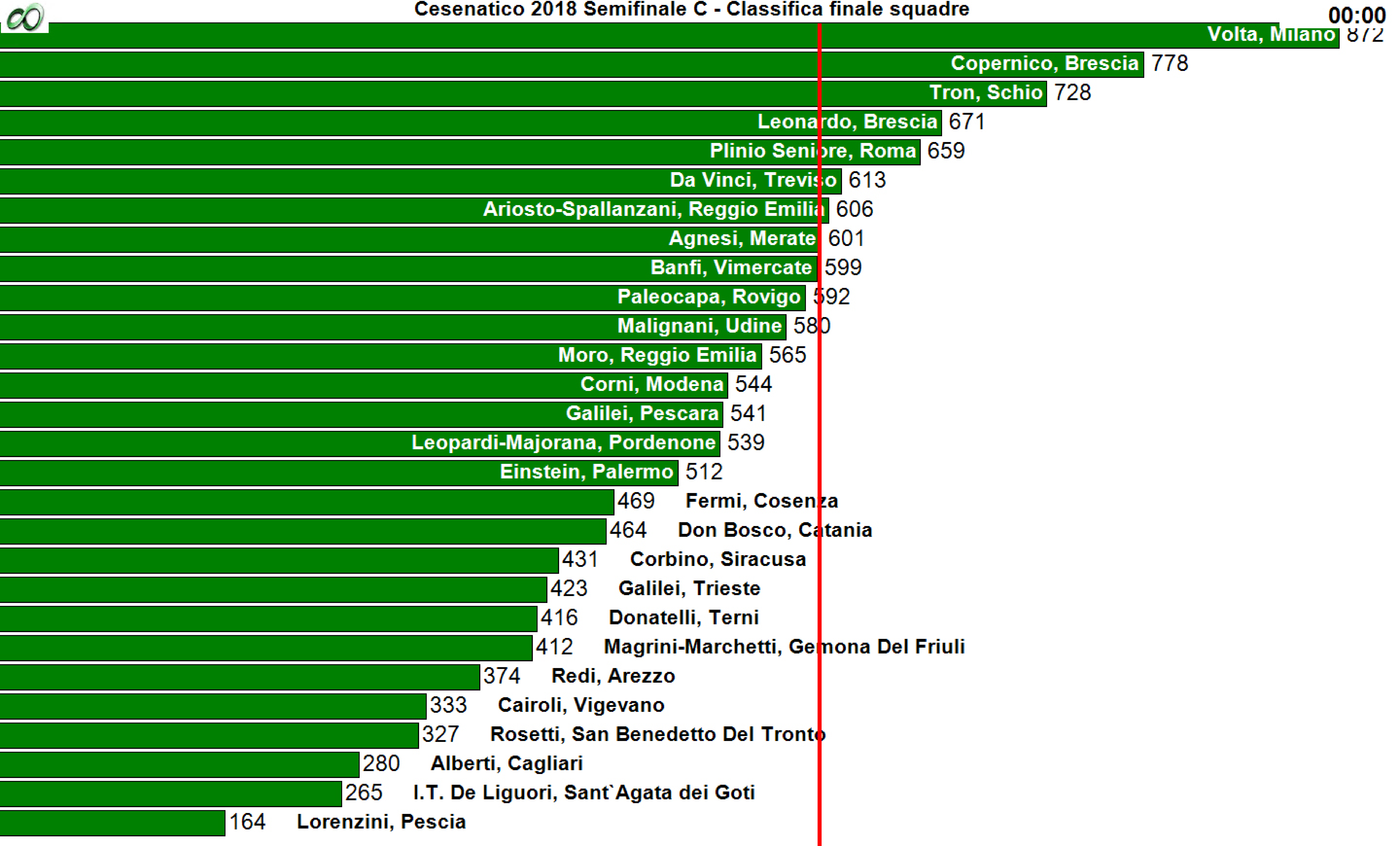
00:00

Semifinale B - Cesenatico 2018 - Stato squadre

00:00

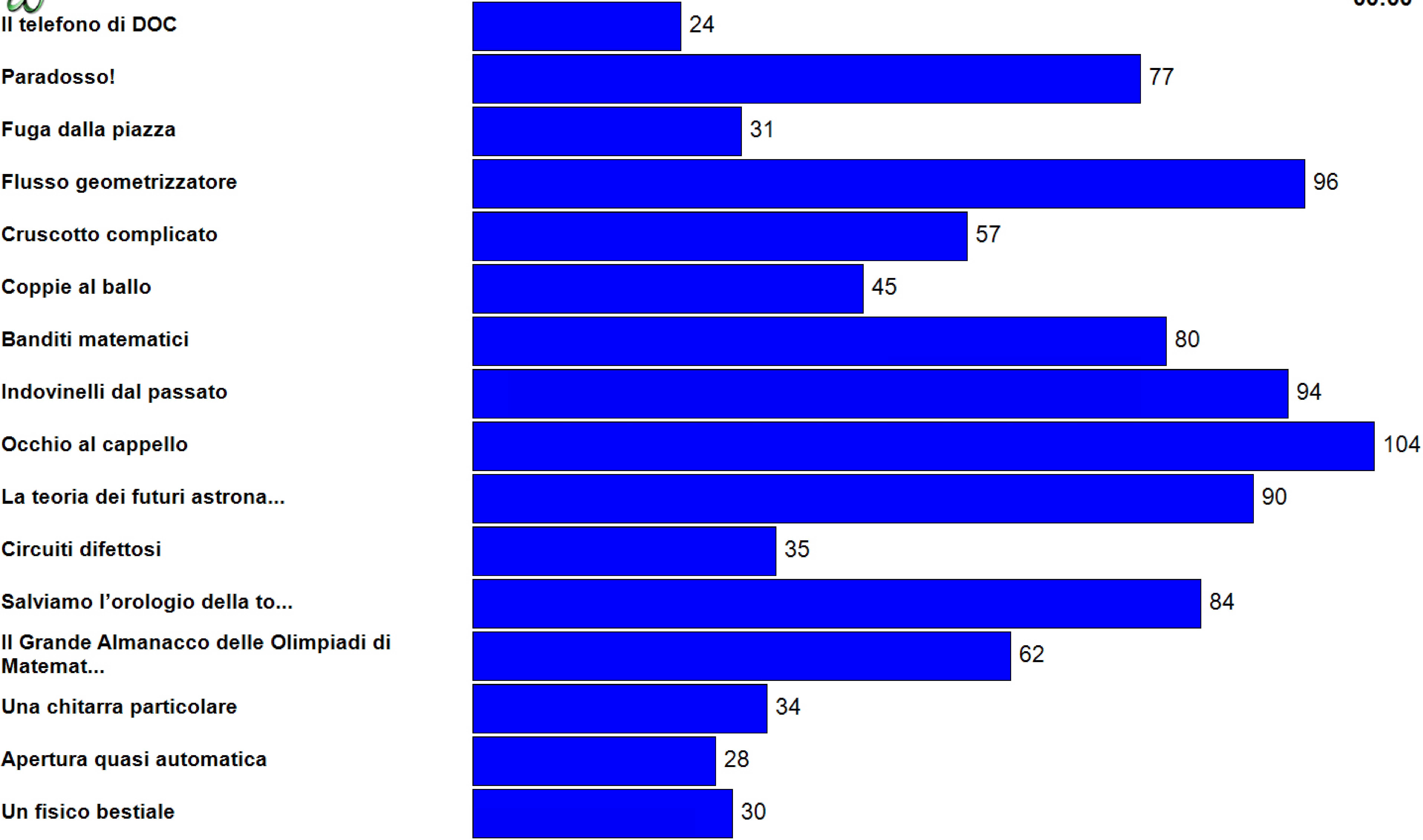
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Golgi					1						4					
02) Torricelli-Ballardini			2													
03) Marconi					1		2									
04) Frisi			2						1		1					
05) Bruno-Franchetti			4			2						3	1			
06) Galilei									3		1		4			
07) Grigoletti																1
08) Gobetti			1			1										
09) Galilei											3					
10) Nomentano			3													
11) Corridoni-Campana											1					
12) Galilei																
13) Fermi								1					1			1
14) Majorana		3									2					1
15) Copernico					1				1		3					
16) Di Savoia-Benincasa												4				
17) Dini										1	2					
18) Forteguerri							1								1	
19) De Giorgi							1				1					
20) Majorana-Fascitelli											1					
21) Marconi		3														
22) Capirola											1					
23) Vercelli					1						1	3				1
24) Taramelli-Foscolo		2		1												2
25) Peano-Pellico									1	4						
26) Bassa Friulana									1		3	1				
27) Don Milani			1			1			1		1					
28) Zanelli			2													

Cesenatico 2018 Semifinale C - Classifica finale squadre



Cesenatico 2018 Semifinale C - Classifica domande

00:00



Cesenatico 2018 Semifinale C - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Leonardo									5							
02) Corni		2							2							
03) Agnesi																
04) Moro													2			
05) Galilei									1							1
06) Tron														1		
07) Malignani									1							
08) Volta									1				3			
09) Plinio Seniore																
10) Lorenzini			1								2		2			
11) Rosetti						1		2					3			
12) Galilei		1											2			
13) Donatelli						1						1	3			
14) Redi	1	3		1												
15) I.T. De Liguori																
16) Alberti		2	3											1		
17) Don Bosco					2								4			
18) Fermi					1											
19) Einstein														3		
20) Paleocapa																
21) Corbino																
22) Copernico				2					1							
23) Ariosto-Spallanzani																
24) Cairoli		1							1			1	4			
25) Leopardi-Majorana											4					
26) Da Vinci							1						2			
27) Banfi																
28) Magrini-Marchetti		2											1			

Semifinale D - Cesenatico 2018 - Classifica finale squadre

00:00


Semifinale D - Cesenatico 2018 - Classifica domande
00:00
Il telefono di DOC 30
Paradosso! 57
Fuga dalla piazza 43
Flusso geometrizzatore 100
Cruscotto complicato 44
Coppie al ballo 41
Banditi matematici 92
Indovinelli dal passato 90
Occhio al cappello 108
La teoria dei futuri astrona... 90
Circuiti difettosi 35
Salviamo l'orologio della to... 51
Il Grande Almanacco delle Olimpiadi di Matemat... 112
Una chitarra particolare 43
Apertura quasi automatica 28
Un fisico bestiale 31

Semifinale D - Cesenatico 2018 - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
01) Mascheroni											3		3			
02) Lussana	1											1	2			
03) Grassi																
04) Fermi				1								2	6			
05) Nievo																
06) Jacopo da Ponte				1					1				2			
07) Copernico										2			5			
08) Ferraris				1					1				1			
09) Avogadro					1								1		1	1
10) Peano				2									2			
11) Leopardi							1									
12) Principe di Napoli													2			
13) Russell-Newton									1				2			
14) Alessi		1	1						1			1	2			
15) L.S. De Liguori												1		1		
16) Pacinotti														1		
17) Galilei													1			
18) Righi													2			
19) Majorana									1							
20) Sbordone			1													
21) Spano		3											1			
22) Rosmini									1							
23) Majorana																
24) Respighi									1							
25) Fanti											4		1			
26) Scarpa																
27) Quadri							2						1			
28) Marinelli													1			

XIX Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – 5 Maggio 3018

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- **Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.**
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una o due stelle [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

FUTURMATH

1. Benvenuto nel futuro!

"Philip J. Frege, ti trovi nel futuro!" esclama Liela Turinga con aria drammatica dopo aver risvegliato dall'ibernazione il nostro eroe. "In che anno sono?" "Poco prima dell'anno 9613. Anzi, è proprio l'ultimo anno x prima del 9613 tale che $9613^2 - x^2$ sia un quadrato perfetto". In che anno si trova il povero pony-pizza?

2. Direttamente nella tua casella

Il prof. Fredholm mostra a Frege una mappa dell'universo, a forma di scacchiera infinita bidimensionale; ogni casella rappresenta un settore del piano galattico. Indica col dito il centro del settore corrispondente alla Terra, e spiega: "La nostra astronave per le consegne ha un motore di mia invenzione che utilizza materia oscura come carburante. Con due palline di materia oscura, prodotte dal nostro Mordaglia, può spostarsi di un settore in orizzontale o in verticale; con tre può spostarsi di un settore in diagonale. Partendo dalla nostra base sulla Terra, possiamo fare consegne in qualunque settore raggiungibile con 60 palline di carburante o meno. Incluso quello di partenza, ovviamente", aggiunge ridacchiando. In quanti settori diversi può fare consegne la Planar Express?

3. Beuler dà i numeri [$\star$]

Il robot Beuler è andato in tilt per colpa di un magnete, ed ha cominciato letteralmente a dare i numeri! Il prof. Fredholm si accorge che i numeri elencati da Beuler sono tutti e soli gli interi positivi N per i quali esiste una sequenza di interi non negativi $a_0, a_1, \dots, a_{2019}$ tali che $N^{a_0} = N^{a_1} + N^{a_2} + \dots + N^{a_{2019}}$ Quanto vale la somma di tutti i numeri elencati da Beuler?

4. Un gioco di equilibrio

Halbert Conway, il burocrate della Planar Express, è un ex-campione di limbo. In questo gioco, ogni singola partita può terminare con la vittoria di uno dei giocatori o un pareggio; però due partite successive non possono concludersi con vittorie di due giocatori diversi. L'ultima sfida di Halbert con Barbaros Schur fu memorabile. La sfida terminò subito dopo il quarto pareggio, e fu equilibratissima: la differenza in valore assoluto tra il numero di vittorie di Halbert e quelle di Barbaros non superò mai 3. Quanti sono i possibili modi (cioè sequenze di risultati di partite successive) in cui può essersi svolta la sfida, in base a queste informazioni?

5. La passeggiata del robo-ubriaco

Il robot Beuler, di nuovo, ha bevuto un po' troppo. Si trova di fronte all'enorme parete del complesso di robo-appartamenti in cui abita, a dodici metri di distanza da esso. Con ognuno dei suoi lunghi passi robot può spostarsi in tre direzioni diverse: o di due metri andando diritto verso la parete perpendicolarmente ad essa, oppure di un metro diritto verso la parete e contemporaneamente di uno verso destra oppure verso sinistra. Con sei passi diritti raggiungerebbe l'ingresso, per esempio, oppure con due passi verso sinistra, quattro diritti, e poi due verso destra. Quanti sono i possibili percorsi che lo portano all'ingresso?

6. Esportare democrazia [$\star\star$]

Il generale Brouwergan ha deciso di bombardare a tappeto una certa zona del pianeta Even 7, che ha la forma di un quadrilatero $ABCD$. Il suo vice Kief Kroneker fornisce le informazioni necessarie per completare l'operazione: valgono le uguaglianze $\angle BAD + \angle CBD = \angle BCA + 2\angle ADB = 90°$ e $\angle BCD = 2\angle BAD$. Inoltre, detto X il punto di intersezione delle diagonali, si ha che $CX = 33$, $AX = 65$. Quanto misura BC?

7. Opportunità di pace intergalattica [$\star\star$]

Gli abitanti del sistema Otto Persei hanno l'abitudine di scrivere i numeri al contrario rispetto a quelli del sistema solare, vale a dire, leggendoli da destra a sinistra anziché da sinistra a destra. Questo è fonte di numerose incomprensioni, anche a causa della loro bellicosità, ma capita occasionalmente che sia noi che loro siamo d'accordo su un'affermazione del tipo "il numero Y è il quadrato del numero X" (ognuno leggendo i numeri alla sua maniera), per esempio per $X = 12, Y = 144$. Per quanti interi positivi X *che non contengono la cifra zero* le due civiltà si trovano d'accordo?

8. Cerchi nel grano

Nell'anno 3018, è ormai conoscenza comune il fatto che i cerchi nel grano sono messaggi degli alieni del pianeta Otto Persei, grossi esperti della cultura terrestre. In un messaggio particolarmente elaborato, l'alieno Mrrr tracciò un triangolo ABC con $AB = 2017$ e $BC = 2076$. Il cerchio inscritto nel triangolo incontrava AC e AB in B_1 e C_1 rispettivamente. Il cerchio tangente al lato AB e ai prolungamenti dei lati CA e CB (dai lati di A e B rispettivamente) incontrava la retta AC in B_2. Il cerchio tangente al lato AC e ai prolungamenti dei lati BA e BC (dai lati di A e C rispettivamente) incontrava la retta AB in C_2. Sapendo che i quattro punti $B_1C_1B_2C_2$ stavano su una stessa circonferenza, trovare il minimo valore possibile per AC.

9. Sgominare il piano [$\star$]

Dopo un acceso diverbio, gli abitanti del sistema Otto Persei hanno deciso di invadere la Terra. Il loro pianeta, per l'appunto, si trova nella posizione $(8,6)$ del piano cartesiano galattico. La loro astronave si muove facendo passi di lunghezza 1 nel piano, sempre verso il basso o verso sinistra, e sta cercando di atterrare nel punto $(0,0)$. Il generale Brouwergan cerca di colpirla con il suo cannone positronico, ma questa cambia direzione esattamente 7 volte e lo disorienta, riuscendo ad atterrare. Quanti sono i diversi percorsi possibili per l'astronave?

10. I presidenti dell'UMI

Nella sala dei presidenti del museo delle teste di Nuova Nuova York si trovano 2017 teste in fila: però alcuni presidenti mentono sempre, altri dicono sempre la verità. Per scovare i bugiardi, Liela chiede a ciascuno di loro (eccetto l'ultimo) se il presidente nel posto successivo sia sincero. Come risposte, in ordine, ottiene un sì, poi un sì e un no, poi un sì e due no, poi un sì e tre no e così via fino al 2016-esimo. Quanti bugiardi ci sono al massimo?

11. Merito della bombetta [$\star$]

La scimmia Goentel, diventata intelligentissima grazie al cappello inventato dal prof. Fredholm, si diletta di problemi di geometria. Nell'aula magna dell'università di Marte, pondera di fronte a un trapezio $ABCD$, rettangolo in B, con base maggiore AB e base minore DC. Ha indicato le lunghezze di alcuni suoi lati: $AB = a$, $BC = 1000$, $DC = b$. Chiama poi D' il simmetrico di D rispetto alla retta AC, ed E l'intersezione di AC e BD. Goentel sa che esiste un valore di a tale per cui $AD'ED$ è inscrivibile in una circonferenza per uno e un solo valore positivo di b. Sapreste aiutarla a scoprire quanto vale $a + b$?

12. Mi faccia un'altra domanda [$\star$]

Quando insegnava all'Università di Marte, il prof. Fredholm era solito dare questo problema ai suoi studenti più promettenti, o a quelli che gli stavano più antipatici. Sia f un polinomio a coefficienti reali che non ha radici multiple. Quante radici multiple può avere, al massimo, il polinomio $g(x) = f(x^3 - 3x)$? *Si dice che λ è una radice multipla del polinomio $p(x)$ se $\frac{p(x)}{(x-\lambda)^2}$ è un polinomio.*

13. L'universo in una stanza [$\star\star$]

"Buone notizie, matematici —esclama il prof. Fredholm— questa scatola a forma di tetraedro regolare di lato $28\sqrt{3}$m contiene non uno, ma due universi, identici, e di forma sferica. Non solo, ma le sfere possono scambiarsi di posto muovendosi rigidamente all'interno della scatola, senza mai sovrapporsi". Quanti *millimetri* può misurare, al massimo, il raggio dei due universi sferici?

14. Da convertire in teoremi [$\star$]

Frege ha deciso di usare il suo rimborso delle tasse per comprarsi 1000 caffè. Per ogni N compreso tra 1 e 1000, l'N-esimo caffè ha un contenuto di caffeina pari a $N/s(N)$, dove $s(N)$ è la somma delle cifre di N: per esempio, il 433esimo caffè ne contiene $\frac{433}{4+3+3}$. Qual è la quantità totale di caffeina che assumerà Frege, pari alla somma dei contenuti di caffeina di tutti i caffè?

15. CAPTCHA [⋆]

Per motivi sconosciuti ai più, Frege ha uno sconveniente tatuaggio con dei numeri. Si tratta di una tabella 4×4 in cui sono annerite le quattro caselle della diagonale che va dalla casella in basso a sinistra a quella in alto a destra. Nelle restanti caselle sono scritti i numeri interi tra 1 e 12, ognuno una volta sola. In ogni coppia di caselle adiacenti orizzontalmente, la casella più a sinistra contiene un numero maggiore di quella più a destra. In ogni coppia di caselle adiacenti verticalmente, la casella più in alto contiene un numero maggiore di quella più in basso. In quanti modi è possibile riempire la tabella rispettando queste condizioni?

16. Forza bruta

Beuler sa che il codice che libera la sfera temporale che gli permetterà di viaggiare nel tempo è una sequenza di 2018 cifre, scelte tra $0, 1, 2$, ma la cui somma vale al più 8. Con le sue dita robot, sta cercando di digitare uno per volta tutti i possibili codici che rispettano queste caratteristiche. Quanti codici digiterà? *Si risponda indicando il resto della divisione di questo numero per 2018.*

17. Martizione del piano [⋆⋆]

Il logo della MuCorp, la più potente corporazione dell'universo, ha la forma di una lettera M che si estende all'infinito, vale a dire, una spezzata non intrecciata composta da una semiretta, due segmenti, e un'altra semiretta (in quest'ordine). In quante parti al massimo viene diviso il piano da 20 spezzate di questo tipo?

18. Compleanno particolare

Frege si è dimenticato un'altra volta di che giorno è il compleanno di Liela! Si ricorda solo che il numero $g_1g_2m_1m_2$ formato scrivendo la data nel formato giorno/mese (con g_1 e m_1 uguali a zero, eventualmente) e leggendo le quattro cifre di fila, è il prodotto di due numeri primi, diversi e minori di 100, che si scrivono con le stesse cifre in ordine opposto (ab e ba). Quali sono le possibili date di nascita che rispettano questa condizione? *Si risponda indicando la somma dei possibili valori del numero $g_1g_2m_1m_2$.*

19. Frege, Escher e Bach

L'olomorfo è uno strumento musicale in grado di proiettare complesse scene quadridimensionali. Philip J. Frege, che si diletta di questo strumento, ha disegnato su un piano a mezz'aria un triangolo equilatero ABC. Detto M il punto medio di BC, ha costruito con uno svolazzo il punto D esterno ad ABC tale che BMD sia un triangolo equilatero. Poi ha ripetuto la costruzione e la melodia su un'ottava più acuta, chiamando N il punto medio di MD e scegliendo P esterno a BMD tale che PND sia un triangolo equilatero. Sapendo che $AB = 3556$, quanto misura PC?

20. Il quadrifoglio a cinque petali

Il leggendario quadrifoglio a cinque petali trovato da Frege aveva la forma di questa figura piana. Su una circonferenza Γ di centro O e raggio 1 prendiamo cinque punti A, B, C, D, E che la dividono in cinque archi uguali e disgiunti. Consideriamo le cinque circonferenze di raggio 1, distinte da Γ, e passanti rispettivamente per A e B, per B e C, per C e D, per D ed E, per E ed A. Una circonferenza più piccola di centro O è tangente a queste cinque circonferenze. Quanto vale il suo raggio? *Si risponda indicando le prime quattro cifre dopo la virgola.*

21. Palloni che girano [⋆]

I Goldbachtrotters sono famosi per la loro abilità nel manipolare numeri di altezza crescente. Nel loro numero più famoso, $2n$ di loro si mettono in fila, indossando maglie su cui sono scritti, da sinistra a destra, i numeri $+1, +2, +3 \ldots + (n-1), +n, -n, -(n-1) \ldots -2, -1$. Il primo di loro, quello con il numero $+1$, lancia la palla al suo compagno di squadra immediatamente alla sua destra. Allo stesso modo, quando riceve la palla, ogni giocatore la passa al giocatore che ha distanza da lui pari al suo numero di maglia, a destra se il numero è positivo e a sinistra se è negativo. Quindi per esempio il giocatore con il numero -4 passa la palla al giocatore che sta quattro posti a sinistra rispetto a lui. Per quanti interi $n \geq 1$ la palla sarà di nuovo in possesso del giocatore iniziale dopo 24 passaggi?

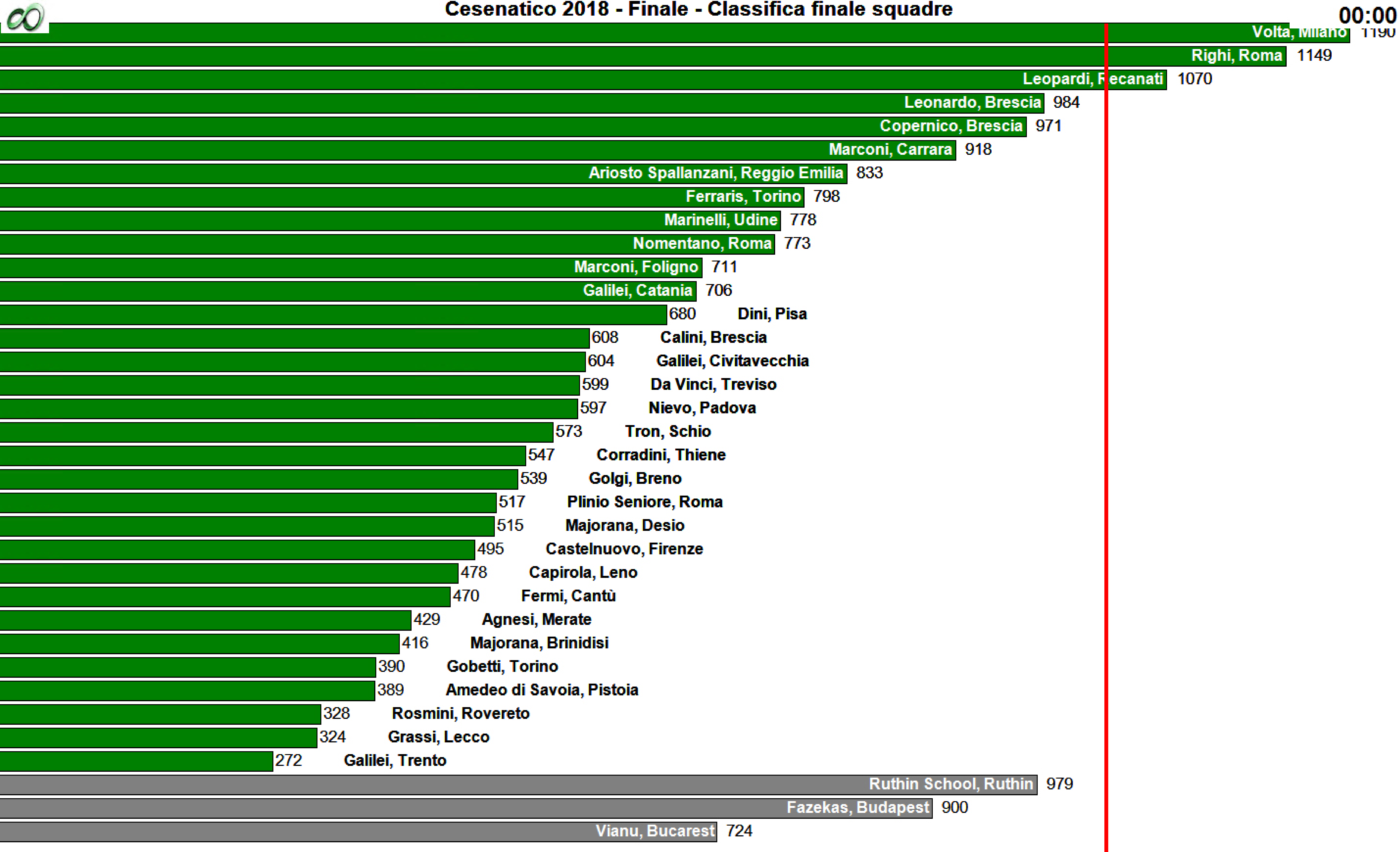
XIX Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Soluzioni – 5 Maggio 3018

olimpiadi.dm.unibo.it
www.oliforum.it

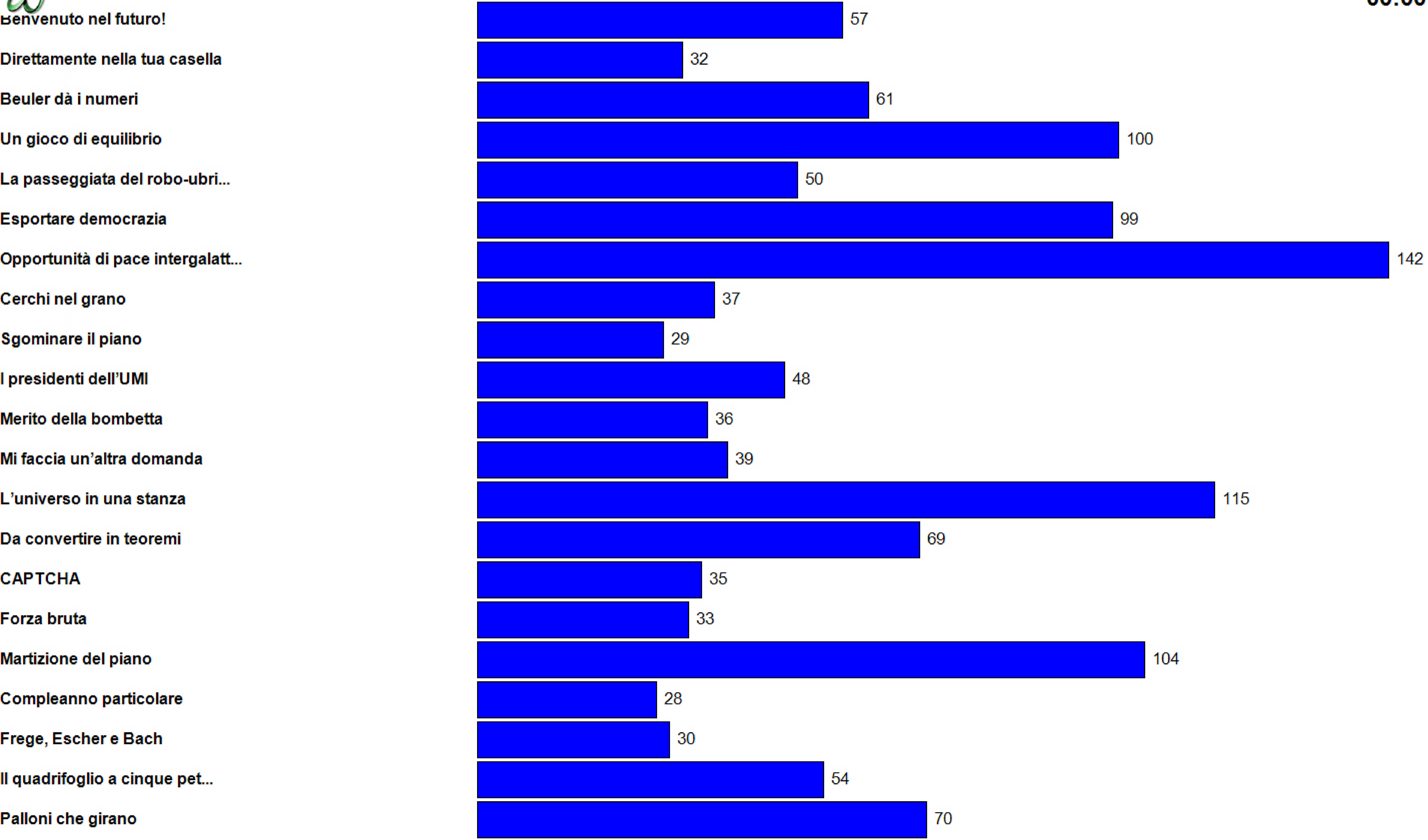
Nr.	Problema	Soluzione
1	Benvenuto nel futuro!	9595
2	Direttamente nella tua casella	2441
3	Beuler dà i numeri [⋆]	3034
4	Un gioco di equilibrio	2401
5	La passeggiata del robo-ubriaco	8989
6	Esportare democrazia [⋆⋆]	0056
7	Opportunità di pace intergalattica [⋆⋆]	0055
8	Cerchi nel grano	2017
9	Sgominare il piano [⋆]	0700
10	I presidenti dell'UMI	1009
11	Merito della bombetta [⋆]	3000
12	Mi faccia un'altra domanda [⋆]	0002
13	L'universo in una stanza [⋆⋆]	6727
14	Da convertire in teoremi [⋆]	7963
15	CAPTCHA [⋆]	6544
16	Forza bruta	0001
17	Martizione del piano [⋆⋆]	3061
18	Compleanno particolare	4311
19	Frege, Escher e Bach	2352
20	Il quadrifoglio a cinque petali	6180
21	Palloni che girano [⋆]	0095

Cesenatico 2018 - Finale - Classifica finale squadre



Cesenatico 2018 - Finale - Classifica domande

00:00



Cesenatico 2018 - Finale - Stato squadre

00:00

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
…ghi							4						1								1
02) Nomentano																	1				1
03) Volta							2						1								2
04) Ferraris										2					1						
05) Corradini					1				1	1											
06) Dini	2			1			2			2										1	
07) Copernico							5						1								
08) Marinelli							3								1						
09) Amedeo di Savoia	1				2						1										
10) Marconi							2							1							1
11) Tron		1	2				2										2				
12) Rosmini				4	1				2												1
13) Castelnuovo							3			1											
14) Golgi						2				3				1							
15) Leonardo																					5
16) Majorana	1										1			5							1
17) Fermi									1											2	
18) Galilei					4		3							1					1		
19) Plinio Seniore	1			1																	1
20) Leopardi		3	1				1										2				
21) Calini	1					2							1							1	1
22) Capirola		1		1									1			3					
23) Da Vinci							1														
24) Grassi					1		2														2
25) Marconi	1						4													1	
26) Gobetti							1	1	1	1											1
27) Ariosto Spallanzani																				1	
28) Galilei													1								
29) Majorana							2		1											1	
30) Galilei					2															4	
31) Agnesi		2											3								
32) Nievo			2																		
33) Vianu			1							1											
34) Fazekas							2						1	3	2						
35) Ruthin School							4								2						

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
I FINALE NAZIONALE
(5 maggio 3018)

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale *x* e il più grande intero minore od uguale ad *x*.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \qquad \sqrt{3} = 1{,}7321 \qquad \sqrt{5} = 2{,}2361 \qquad \sqrt{7} = 2{,}6458 \qquad \pi = 3{,}1416$$

FUTURMATH

DA OGGI DISPONIBILE ANCHE IN VERSIONE FEMMINILE

Gara scritta da:

Carla Tedeschi
Responsabile olimpiadi provincia di Reggio Emilia

Claudia Manotti
IIS "B. Russel" di Guastalla

Ercole Suppa
Liceo Scientifico "A. Einstein" di Teramo

Rosanna Tupitti
Liceo Scientifico "A. Einstein" di Teramo

Carlo Càssola
Liceo Scientifico "Copernico" di Udine

Emiliano Nesi
Liceo Scientifico "Copernico" di Prato

Nadia Greppi
Liceo Scientifico "A. Spallanzani" di Reggio Emilia

Sandro Campigotto
ISIS "Paschini-Linussio" di Tolmezzo

1. IBERNATO
Philip J. Frege, per gli amici Fry, è un ragazzo che lavora come consegnatore di pizze a New York. La sera del capodanno del 1999 riceve l'ordine di consegnare delle pizze al laboratorio di criogenia. Arrivato sul posto non trova nessuno, ma vede un appunto che dice che il figlio del dottor Hercule Zoup nel 2017 festeggerà un numero di anni che coinciderà con la somma delle cifre del suo anno di nascita. Fry, incuriosito, si chiede che età avrà il figlio di Hercule, ma cadendo in una capsula rimane ibernato per 1000 anni prima di poter risolvere l'enigma.

2. IL RISVEGLIO
Fry si risveglia nel 2999. Aprendo gli occhi capisce di trovarsi in un laboratorio con uno strano essere con un occhio solo che gli pone una domanda a bruciapelo: "Considera il più piccolo numero divisibile per tutti i numeri naturali da 1 fino a 30. Quanti sono i suoi divisori positivi?" Fry sorpreso non riesce a rispondere.

3. VERSO LA LIBERTÀ
Non ricevendo alcuna risposta, Liela Turinga - così si chiama la ragazza con un occhio solo - analizzando Fry, gli propone il lavoro di fattorino. Fry non ci sta e tenta di scappare dal centro di criogenia. Giunto sul retro della struttura, trova una porta a codice chiusa. Qualcuno sulla parete a fianco ha disegnato un triangolo isoscele di base 400 mm e lato 290 mm e due cerchi uguali tangenti tra loro e tangenti, ciascuno, alla base e ad uno dei lati del triangolo. Su uno dei cerchi è riportato un diametro con sopra una x. Vuoi vedere che il codice è proprio il valore di x in mm? Con uno sforzo di memoria Fry ricorda le lezioni di geometria seguite a scuola e, pur sbagliando, dopo un po', riesce ad azzeccare il codice giusto. Qual è?

4. BEULER'S GAME 1
Durante la fuga, Fry scambia una cabina per il suicidio per una vecchia cabina telefonica e si mette in fila, conoscendo Beuler, un robot che lavora come "piegatore". Per passare il tempo Beuler sta risolvendo un gioco riportato su un manifesto pubblicitario: data una scacchiera 6×6 con una pedina posta sulla casella in basso a sinistra, quanti percorsi esistono che portano la pedina nell'angolo in alto a destra potendo fare solo mosse che spostano la pedina dalla casella in cui si trova ad una delle tre caselle confinanti con quella di partenza nel suo vertice in alto a destra?

5. COINQUILINI
Beuler sostiene di odiare gli esseri umani, ma Fry gli sta simpatico e decide di aiutarlo proponendogli di andare a vivere a casa sua. L'appartamento di Beuler è un romboedro, cioè un parallelepipedo le cui sei facce sono tutte rombi. Per impedire alle forze dell'ordine di rilevare Fry (sprovvisto del chip di riconoscimento), Beuler deve sistemare una barra di metallo su tutte le diagonali delle facce dei rombi che formano il suo appartamento. Se gli spigoli della sua casa misurano 18 m, quanto vale la somma dei quadrati delle lunghezze in m di tutte le barre di metallo necessarie?

6. EFFETTI MAGNETICI
"Vedi, Fry,…" - fà Beuler - "…per vivere nel 31-esimo secolo bisogna conoscere un po' di matematica. Facciamo un gioco. Osserva. Ho 4 carte, due cuori e due picche. Calcola la probabilità di pescare due carte dello stesso seme. Ora aggiungo un certo numero di carte di fiori. Se la probabilità di pescare due carte dello stesso seme non è cambiata, quante carte ho aggiunto?" Fry tenta di rispondere quando, senza pensarci, stacca una calamita dal frigorifero e la attacca sulla testa di Beuler… che va in tilt e comincia a cantare Blowin' in the Wind. Qual era la risposta all'enigma di Beuler?

7. LONTANI PARENTI
Liela riesce a trovare Fry. Gli confida di voler abbandonare il suo lavoro opprimente e che il suo sogno è di viaggiare nello spazio. Iniziano una ricerca per verificare se esiste nella New York dell'anno 3000 un discendente di Fry che li possa aiutare e, in effetti, c'è: si tratta dello scienziato Hubert Fredholm, lontanissimo pro-pro-pro-nipote di Fry. L'unico guaio è che il numero civico di uno scienziato, negli anni 3000, è sempre mascherato da un'operazione matematica. Sul file di Fredholm c'è la serie di numeri 16, 1156, 111556, … ottenuta inserendo il numero 15 in mezzo alle cifre del numero precedente. Se n è il numero ottenuto dopo il 2018-esimo inserimento e $S(m)$ la somma delle cifre del numero m, il civico di Fredholm è $S(\sqrt{n})$.

8. PLANAR EXPRESS
Hubert Fredholm è un professore di "matematica dei neutroni quantici" presso l'Università marziana e membro più anziano dell'Accademia dei Professori. È un grande inventore ed è suo il progetto da cui stati costruiti tutti i robot della Terra. Hubert è il proprietario della agenzia di trasporti intergalattici Planar Express. Hubert propone a Fry, Liela e Beuler di diventare suoi dipendenti, ma solo se sapranno risolvere un problema. Hubert scrive i numeri da 1 a 2018 lasciando uno spazio tra essi e scrivendo un "$=$" in fondo. Ora chiede di riempire lo spazio tra due numeri con un segno "$+$" o con un segno "$-$" in modo da ottenere come risultato finale dell'operazione 1, ma di farlo con il maggior numero possibile di segni "$+$". Fry è disperato e Liela sta per spaccare qualcosa. Per fortuna che Beuler ha la soluzione. Che numero di segni "$+$" farà diventare Fry un fattorino del 3000?

9. HALBERT CONWAY
Alla Planar Express si è aggiunto Halbert Conway, che la dirige come se fosse sua, occupandosi dell'amministrazione finanziaria e del personale. Le sue peculiarità sono la pignoleria, l'ordine, la puntualità, il rispetto delle norme e dei regolamenti, la pianificazione e l'economia. Adora i giochi con i dadi ed ha un dado elettronico a sei facce che, resettato, ha i primi sei numeri interi positivi sulle sei facce e, dopo ogni lancio, dimezza i valori pari se è uscito un numero pari, aumenta il valore di ciascuna delle sei facce di uno se è uscito un numero dispari. Halbert ha chiesto a Beuler di calcolare quale numero n ha la massima probabilità di uscita al terzo lancio e quale sia questa probabilità $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini. (Dai come risposta $1000n + a + b$.)

10. LA SQUADRA DEL TRAMONTO

Negli anni 3000 esiste una polizia spaziale denominata la “Squadra del Tramonto” che, se un essere umano raggiunge i 160 anni, lo cattura e lo trasporta su un apposito pianeta-ospizio facendogli poi vivere gli ultimi anni in una realtà simulata. Siccome il professore Fredholm è nato nel 2841, ha 159 anni ma ne dichiara 150 per evitare di essere catturato. Purtroppo l’inganno viene scoperto. Fry decide di usare una delle invenzioni del professore, lo “Sniffoscopio”, un telescopio capace di annusare l'odore di qualsiasi cosa in qualsivoglia parte dell'universo. Lo Sniffoscopio individua “l’odore di anziano” su un pianeta che dista a^8+b^8 parsec dalla terra, dove a e b sono le radici del polinomio x^2+x-5. Quanti parsec dovranno percorre Fry, Liela e Beuler per recuperare il professor Fredholm e tutti gli anziani confinati sul pianeta-ospizio?

11. IL TEAM CRESCE

Alla squadra della Planar Express, si è aggiunto John Zornberg, vecchio amico del professor Fredholm. Si tratta di un alieno del pianeta Decapod 10, somigliante ad una grossa aragosta. Fry lo ha reclutato come responsabile medico. Le sue competenze sono risultate fondamentali, quando, giunti per una consegna sul pianeta Cese-Na-Tic terzo si è scoperto esserci un’infezione. Zornberg è riuscito a mappare la sintomatologia della malattia nel modo seguente: ha introdotto la notazione $P \to Q$ per indicare che chi ha il sintomo P ha anche il sintomo Q. Poi ha determinato tutti i sintomi della malattia e li ha chiamati *A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M* e *N*. Infine ha determinato i seguenti collegamenti fondamentali: $A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to E$, $E \to A$, $C \to F$, $F \to G$, $G \to H$, $H \to I$, $I \to G$, $L \to A$, $L \to M$, $L \to N$, $N \to L$, $M \to L$ e ha notato che, sapendo che $P \to Q$ e $Q \to R$, sa che anche $P \to R$. Per debellare la terribile malattia è stato necessario calcolare tutte le coppie ordinate di sintomi diversi P e Q tra le 12 elencate, tali che $P \to Q$. Quante sono tali coppie ordinate?

12. ERRORI SPAZIALI

Amy Weil è una studentessa dell'Università Marziana che il professor Fredholm ha assunto perché ha il suo stesso gruppo sanguigno. È una ragazza piuttosto stramba e spesso un po’ superficiale. Ieri, mentre svolgeva degli esercizi in preparazione ad un esame, ha considerato la successione di Fibonacci ($a_0=1$, $a_1=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$) ed ha deciso di scrivere in ordine i primi elementi. Purtroppo, ad un certo punto, anziché scrivere il termine corretto lo ha aumentato erroneamente di 1. Da quel momento non ha più sbagliato i calcoli e ha deciso di smettere una volta scritto il numero 1830. Conway, accortosi subito dell’errore, le ha indicato subito l'indice del termine calcolato erroneamente. Quale indice ha indicato?

13. NEW MARS VEGAS

I componenti della Planar Express fanno visita ai genitori di Amy, Leo e Inez, i quali vogliono costruire una Nuova Mars Vegas. L’idea è quella di prendere il rudere costruito su un terreno protetto, una struttura a forma di parallelepipedo e di ristrutturarla aumentando di 2 m, 3 m e 4 m le tre dimensioni in modo da aumentare il volume della struttura di 3447 m^3 e farlo diventare un cubo. Liela, assieme ad un gruppo di ecofemministe, cerca di opporsi e finisce per salvare una piccola sanguisuga in via di estinzione. Quello che si scoprirà è che la piccola sanguisuga è un alieno che vuole distruggere l’umanità. Per fortuna l’intervento di Fry sistema le cose. Ripartendo da Marte, Beuler si chiede: “Qual era il volume iniziale del rudere prima della ristrutturazione in m^3?”

14. IL PIANETA SMULLYAN

Fry e la Planar Express stanno per effettuare una consegna sul pianeta Smullyan. Liela ha già messo in guardia Fry sugli abitanti del pianeta che fanno parte di due fazioni religiose: Gli “erov” che sono sempre sinceri e “oslaf” che mentono sempre. All’arrivo compare il sindaco che si presenta dicendo “Io sono un …” purtroppo un colpo di vento ha impedito a Fry di sentire la sua voce. A questo punto si presentano a ritirare la merce vari gruppi di abitanti: il primo gruppo è formato da due abitanti, ciascuno dichiara: “l’altro è un oslaf”. A seguire arriva una delegazione di tre abitanti che dichiarano ciascuno “gli altri due appartengono al gruppo degli erov”, quindi arriva una gruppo di quattro persone che dichiarano ciascuno: “gli altri tre del gruppo sono oslaf.” E così via fino all’ultima delegazione di 50 abitanti. Ogni gruppo formato da n abitanti ha dichiarato che gli altri *n-1* sono “oslaf” se n è pari, “erov” se n è dispari. Beuler chiede a Fry se sa quanti “erov”, al massimo, può aver incontrato.

15. BEULER’S GAME 2

I viaggi sulla Planar Express sono noiosi e Beuler, non avendo altro da fare, si mette ad inventare giochi sulla scacchiera. L’ultimo che ha risolto prevedeva di posizionare una pedina sulla casella in basso a sinistra di una scacchiera 8×8 e di calcolare quanti percorsi esistono che portano la pedina nella casella d’angolo in basso a destra potendo fare solo mosse che spostano la pedina da una casella a una delle tre che si trovano nella colonna alla sua destra e nella riga immediatamente superiore, oppure nella stessa riga, oppure in quella immediatamente inferiore. Che numero ha trovato?

16. FRATTURE DELLO SPAZIO

Il professor Fredholm manda una spedizione a investigare sull’apertura dimensionale improvvisamente apparsa nello spazio. Il computer mostra un’apertura nello spazio ABC dalla forma di un triangolo acutangolo. Se D è il secondo punto di intersezione della bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ con la circonferenza circoscritta, $AB=26\text{ km}$, $AC=30\text{ km}$ e $AD=BD+DC$, quanto misura l’area ABC da ispezionare (in km^2)?

17. MORDAGLIA

Mordaglia è diventato l'animaletto domestico di Liela. È stato salvato su un pianeta vicino all'estinzione quando si è scoperto che divora qualsiasi cosa trasformandola in materia oscura, utilizzata come carburante per astronavi. Fry ha scoperto che quando Mordaglia si nutre di libri di matematica, il carburante dura molto di più. Ora c'è bisogno di fare rifornimento per il prossimo viaggio. Fry si avvicina a Mordaglia e gli porge un libro dal quale legge: "Quanti sono i numeri di dieci cifre tutte distinte divisibili per 11111?" Per tutta risposta, il piccolo divora il libro producendo una grande quantità di materia oscura. Quale risposta al problema avrebbe letto Fry se Mordaglia non avesse divorato il libro?

18. TRAIETTORIE NELLO SPAZIO

Ignorando gli ordini del professore Fredholm, Liela porta la navetta Planar Express a un demolition derby per pareggiare i conti con un tizio che l'aveva offesa. Ora però deve far rientro sulla Terra e deve calcolare la traiettoria più breve. Proietta sullo schermo la posizione. Il computer di bordo, forse per un guasto dovuto ai colpi ricevuti, disegna un quadrilatero $ABCD$. Liela osserva che al suo interno c'è un punto P per cui ADP e BCP sono triangoli equilateri. Costruendo esternamente al quadrilatero i triangoli equilateri ABE e DCF, il computer di bordo indica che la Terra è nel punto F e la Planar Express in E. Il computer riporta solamente i dati $AD = 20$ anni luce, $DC = 21$ anni luce e $F\hat{D}P = 90°$. Con questi dati, riuscirà Liela a calcolare la lunghezza di EF (in anni luce) per riportare tutti a casa?

19. IL MUSEO DELLE TESTE

Tanti personaggi sono arrivati nel futuro grazie a una tecnologia che consente di separare le teste dal resto del corpo e di conservarle, vive e attive, a tempo indeterminato all'interno di contenitori cilindrici trasparenti. La maggior parte di questi contenitori è radunata all'interno del Museo delle Teste, dove si trovano politici, atleti, attori, presidenti UMI e ogni sorta di personaggi famosi del ventesimo secolo e oltre. Il Museo è in grado di garantire la sopravvivenza di tante teste quante le composizioni di 14 in cui l'ultimo termine (quello più a destra) è dispari. Una *composizione* di un intero *n* è una lista ordinata di interi positivi la cui somma è *n*. Ad esempio il numero 3 ammette le seguenti quattro composizioni: (3), $(1;2)$, $(2;1)$ e $(1;1;1)$.

20. BEULER'S GAME 3

Di rientro da Marte, Beuler si dedica al suo passatempo preferito. Data una scacchiera 6×6 con una pedina posta sulla casella in basso a sinistra, quanti percorsi esistono che portano la pedina nella casella d'angolo in alto a destra potendo fare solo mosse che spostano la pedina da una casella a una delle tre confinanti con essa in alto, a destra o in basso, senza però poter tornare su caselle già attraversate? Oramai allenato a questi problemi, Beuler risolve l'enigma in pochi secondi. Quale soluzione ha trovato?

21. SUONI SPAZIALI

Un motivetto musicale simile a un richiamo tormenta la terra. Nessuno sa cosa sia, ma Fry deve scoprirlo. Una terribile navicella spaziale sta frantumando i pianeti in cerca di qualcosa. Beuler, utilizzando il suo cervello positronico, riesce a tradurre la musica nel polinomio $p(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)$.
La musica cesserà se si riuscirà ad eliminare i termini di grado 11 ,12 e 13 di $p(x)$. Beuler imposta il calcolo scrivendo $p(x)-(ax^{11}+bx^{12}+cx^{13})$, ma quanto valgono a, b e c? (Dai come risposta $a+b+c$).

22. UNA CONSEGNA PROBLEMATICA

Il contenitore di una fornitura alimentare per Decapod 10 ha la forma di un tetraedro. Per proteggerlo dal viaggio spaziale, Amy ha realizzato un triangolo i cui lati misurano 60 m, 50 m e 50 m che è esattamente lo sviluppo della superficie totale del contenitore. Quale volume occupa in m^3?

23. OMICIDIO SUL PLANAR EXPRESS

Un terribile mostro alieno è riuscito con l'inganno a salire sul Planar Express e sta divorando tutti i componenti del team. Fry riesce a capire che per sconfiggere il mostro e ridare vita ai suoi amici dovrà risolvere un problema molto difficile. L'alieno morirà solo se colpito con un raggio di energia di potenza pari a $\sum_{i=1}^{500}\frac{P(2i)}{6}$, dove $P(n)$ è il prodotto delle cifre non nulle del numero naturale *n*. Quale potenza salverà l'equipaggio del Planar Express?

24. L'ULTIMO UOVO

Fry scopre di avere poteri telepatici e capisce di dover sconfiggere le Forze Oscure e salvare l'ultimo uovo degli Enciclopodi, una specie ormai estinta che evolvendo ha inglobato i DNA di tutte le specie viventi. L'uovo è un parallelepipedo rettangolo di spigoli 20 mm, 40 mm e 60 mm. Per proteggerlo, la Planar Express deve scoprire qual è l'area massima possibile dell'ombra del parallelepipedo proiettata dal sole su uno schermo (si considerino i raggi solari tutti paralleli). Per guadagnare tempo, il Professor Fredholm inventa un pulsante che può trasportare una persona dieci secondi indietro nel tempo. Grazie a questa trovata, Fry riesce a vincere le Forze Oscure.
Fry e Liela decidono di sposarsi e di affrontare insieme le prossime avventure spaziali.

I FINALE NAZIONALE FEMMINILE (05/05/2018)

			D.1 27	D.2 30	D.3 36	D.4 37	D.5 38	D.6 48	D.7 79	D.8 78	D.9 71	D.10 37	D.11 66	D.12 41	D.13 39	D.14 35	D.15 50	D.16 43	D.17 124	D.18 115	D.19 132	D.20 46	D.21 57	D.22 50	D.23 65	D.24 130
1	**01 GOLGI (Breno)**	1155	32	34	41	47	44		99		67	40	69	122 J	40	37	65	48		130						
2	04 MARCONI (Carrara)	1125	27	20	16	32	53	52	73	-20	75	43	71	49	59	28	60					112 J	65	70		
3	02 COPERNICO (Prato)	1044	33	40	36	29	38	-10			-10	37	74	56	41	15	120 J	51				54	67	60	73	
4	19 PASCHINI (Tolmezzo)	931	27	20	36	41		48	84	93		38		43	32	36	53			-10			-20		170 J	
5	09 ARIOSTO-SPALLANZANI (Reggio Emilia)	887	17	30	42		38	58		88	-20	37		41	39	110 J		53			-10		59		75	-10
6	**03 CASSINI (Genova)**	847	42	36	16	42	46	68			-20	37			47	41	52	63			-10	66	60	-40 J	61	
7	05 MORO (Reggio Emilia)	837	29	32	51	28	38	56			79	-10	76	32		50	54				-20	122 J	-20			
8	**17 CALINI (Brescia)**	818	35	30	56		48	-10			-10	57	60	44	29	15					-10		154 J		80	
9	13 DA PONTE (Bassano del Grappa)	794	27	45	26	57	43	63			86	41	48	41	54	15								58	-10	-40 J
10	**06 GOBETTI (Torino)**	792	-30	31			29		87		81	42				40				250 J	-10		62		-30	
11	10 MAIORANA (Torino)	790	27	30	44		32		84		-10		81	102 J		45				135	-10			-10		
12	07 PALEOCAPA (Rovigo)	727	17	30	38	-20	41	53			-10	-20	86	94 J	44	35		49		-10				-10	70	
13	16 FERRARIS (Torino)	647	17	33	36	30	38	51	-10	-10	-20	-10			-20	35	55		-10				72	130 J		-10
14	14 LEONARDO (Brescia)	637	28	20	40	45	40	48		88	-10	-20				35		58	-10			64 J	41		-60	-10
15	11 DON MILANI (Montichiari)	604	47	50		33	38	39			-10	45			43	43	56			J				-10		-10
16	**15 MARCONI (Foggia)**	567	17	35					85	-10		47		46	90 J	-10		47							-20	
17	08 BATTAGLINI (Taranto)	561	30	30		-10			79		76	39			39	38 J										
18	**12 KENNEDY (Roma)**	550	27	30		17		50			-20	42				15	96 J						53			
19	20 MESSEDAGLIA (Verona)	494	31	-20	39		38	54			81			41		-10				J						
20	18 ROMITA (Campobasso)	436	37	38	37	27	-10					-20	72	35		-20					J					

GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
I FINALE NAZIONALE
(5 maggio 2018)

GRIGLIA SOLUZIONI

1. IBERNATO	**0023**
2. IL RISVEGLIO	**7680**
3. VERSO LA LIBERTÀ	**0120**
4. BEULER’S GAME 1	**1683**
5. COINQUILINI	**7776**
6. EFFETTI MAGNETICI	**0005**
7. LONTANI PARENTI	**6058**
8. PLANAR EXPRESS	**1425**
9. HALBERT CONWAY	**3011**
10. LA SQUADRA DEL TRAMONTO	**3791**
11. IL TEAM CRESCE	**0082**
12. ERRORI SPAZIALI	**0004**
13. NEW MARS VEGAS	**5814**
14. IL PIANETA SMULLYAN	**0650**
15. BEULER’S GAME 2	**0127**
16. FRATTURE DELLO SPAZIO	**0336**
17. MORDAGLIA	**3456**
18. TRAIETTORIE NELLO SPAZIO	**0058**
19. IL MUSEO DELLE TESTE	**5461**
20. BEULER’S GAME 3	**7776**
21. SUONI SPAZIALI	**0124**
22. UNA CONSEGNA PROBLEMATICA	**1984**
23. OMICIDIO SUL PLANAR EXPRESS	**7406**
24. L’ULTIMO UOVO	**2800**

SOLUZIONI - GARA DI MATEMATICA A SQUADRE FEMMINILE
I FINALE NAZIONALE (5/5/2018)

1. IBERNATO [23] Carla Tedeschi

Si tratta di trovare un anno x, precedente al 1999 la cui somma delle cifre coincida con $2017-x$.
Procediamo a ritroso:

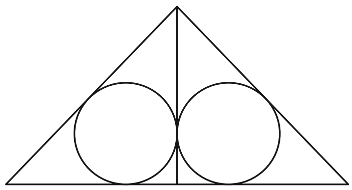
anno	Somma delle cifre	Età ($2017-x$)
1997	26	20
1996	25	21
1995	24	22
1994	23	23

L'anno cercato è il 1994 e l'età sarà di 23 anni.
Esiste una seconda soluzione, da scartare, in quanto nel 1999 non era possibile prevedere la nascita di un figlio che nato nell'anno 2012 avrebbe compiuto 5 anni nel 2017.

2. IL RISVEGLIO [7680] Carlo Càssola

Il più piccolo numero n cercato deve essere il minimo comune multiplo dei numeri da 1 fino a 30.
$n=2^4\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29$.
Il numero dei suoi divisori è $(4+1)(3+1)(2+1)\cdot 2^7=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2^7=7680$.

3. VERSO LA LIBERTÀ [120] Sandro Campigotto



Tracciando l'altezza h relativa alla base, le circonferenze rimangono inscritte nei due triangoli congruenti così formati.
Il raggio della circonferenza inscritta è determinato dalla formula $r=\dfrac{A}{p}$.

$$h=\sqrt{290^2-200^2}=210\text{ mm};\ A=\frac{200\cdot 210}{2}=21000\text{ mm}^2;\ p=\frac{290+210+200}{2}=350\text{ mm}.$$

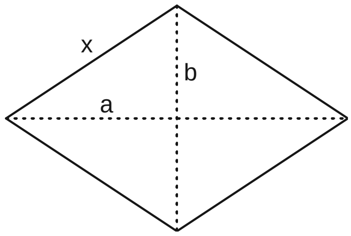
$$2r=2\cdot\frac{21000}{350}=120\text{ mm}.$$

4. BEULER'S GAME 1 [1683] Sandro Campigotto

Dividiamo il calcolo in casi:

Mosse $\nearrow$	Mosse $\uparrow$	Mosse $\rightarrow$	Percorsi possibili
0	5	5	$\frac{10!}{5!\cdot 5!}=252$
1	4	4	$\frac{9!}{4!\cdot 4!}=630$
2	3	3	$\frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!}=560$
3	2	2	$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=210$
4	1	1	$\frac{6!}{4!}=30$
5	0	0	1
		TOTALE	1683

5. COINQUILINI [7776] Carlo Càssola



Osserviamo che, in generale, in un rombo di lato x e diagonali a e b accade che $x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, cioè che $a^2 + b^2 = 4x^2$.

In un romboedro abbiamo sei rombi uguali. La somma dei quadrati di tutte le sue diagonali è pari $6 \cdot 4 \cdot 18^2 = 7776$.

6. EFFETTI MAGNETICI [5] Sandro Campigotto

La probabilità di pescare due carte dello stesso seme è:

$$P(\text{"stesso seme"}) = P(\text{"2 cuori"}) + P(\text{"2 picche"}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Aggiungendo x carte di fiori la probabilità diventa:

$$P(\text{"stesso seme"}) = P(\text{"2 cuori"}) + P(\text{"2 picche"}) + P(\text{"2 fiori"}) = \frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x} + \frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x} + \frac{x}{4+x}\cdot\frac{x-1}{3+x} =$$

$$= \frac{4 + x(x-1)}{(x+4)(x+3)}.$$

Uguagliando le due probabilità e risolvendo, si ottiene l'equazione $x^2 - 5x = 0$.

La soluzione cercata è $x = 5$.

7. LONTANI PARENTI [6058] Nadia Greppi

La sequenza di numeri è nella forma $\left(\underbrace{333...3}_{n}+1\right)^2 = \underbrace{111...1}_{n-1}0\underbrace{888...8}_{n-1}9 + \underbrace{666...6}_{n} + 1 = \underbrace{111...1}_{n}\underbrace{555...5}_{n-1}6$.

Dopo 2018 inserimenti, avremo il numero $n = \left(\underbrace{333...3}_{2019}+1\right)^2$, per cui $S\left(\sqrt{n}\right) = 2019 \cdot 3 + 1 = 6058$.

8. PLANAR EXPRESS [1425] Emiliano Nesi

Per massimizzare il numero di operazioni "+" è necessario sommare tra loro il maggior numero di addendi e per fare questo ci conviene sommare tra loro i numeri più piccoli. Calcoliamo il più piccolo valore di k per cui $1+2+3+...+k-\left[(k+1)+(k+2)+...+2018\right] \geq 0$, cioè

$$\frac{k(k+1)}{2} - \left(\frac{2018 \cdot 2019}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right) \geq 0$$

$$k(k+1) \geq 1009 \cdot 2019.$$

Con un po' di pazienza e procedendo per tentativi successivi si determina che $k = 1427$

L' operazione $1+2+3+...+1427-1428-1429-....-2018 = 585$ non dà risultato 1, come richiesto. Possiamo ottenere il risultato eliminando l'addendo opportuno. In particolare, se cambiamo segno a $\frac{585-1}{2} = 292$, la somma darà risultato 1 ed abbiamo sacrificato il minor numero possibile di addendi positivi. Considerando che davanti al numero 1 non abbiamo messo nessun segno, alla fine abbiamo utilizzato $1427-1-1=1425$ segni di somma.

9. HALBERT CONWAY [3011] Sandro Campigotto

Descriviamo la situazione con una tabella.

	$\{1,2,3,4,5,6\}$		
	$\swarrow$ pari $\frac{1}{2}$	$\searrow$ dispari $\frac{1}{2}$	
	$\{1,1,3,2,5,3\}$	$\{2,3,4,5,6,7\}$	
$\swarrow$ pari $\frac{1}{6}$	$\searrow$ dispari $\frac{5}{6}$	$\swarrow$ pari $\frac{1}{2}$	$\searrow$ dispari $\frac{1}{2}$
$\{1,1,3,1,5,3\}$	$\{2,2,4,3,6,4\}$	$\{1,3,2,5,3,7\}$	$\{3,4,5,6,7,8\}$

Il numero con maggior probabilità di uscita risulta essere il “3” con probabilità:

$$p(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2+5+6+3}{72}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}.$$

La risposta richiesta è 3011.

10. LA SQUADRA DEL TRAMONTO [3791] Carlo Càssola

Per le relazioni radici-coefficienti si osserva che $a+b=-1$ e $ab=-5$.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1+10=11.$$

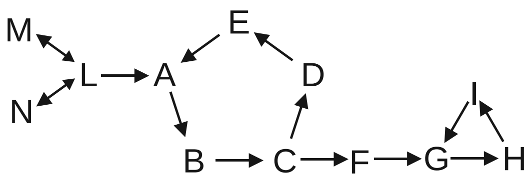
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=11^2-50=71$$

$$a^8+b^8=(a^4+b^4)^2-2a^4b^4=71^2-1250=3791.$$

11. IL TEAM CRESCE [82] Claudia Manotti

Prima soluzione

Rappresentiamo graficamente le relazioni tra i sintomi.



I sintomi M, N e L sono equivalenti e da loro discende un qualunque altro sintomo. Abbiamo 3 possibili scelte per P e 11 possibili scelte per Q: $3\cdot 11=33$.

I sintomi A, B, C, D ed E sono equivalenti. Scelto uno tra loro per P, ci restano 8 possibili scelte per Q: $5\cdot 8=40$.

Da F possiamo ottenere uno qualunque dei sintomi G, H e I; 3 possibilità.

I sintomi G, H e I sono equivalenti e quindi, scelto uno tra loro come P, ci restano altre 2 possibili scelte per Q; $3\cdot 2=6$.

In totale abbiamo $33+40+3+6=82$ possibili implicazioni.

Seconda soluzione

Vi sono 12 sintomi e scelti 2 vi è sicuramente un freccia che li collega: $\binom{12}{2}=66$ frecce.

I sintomi M, N e L sono equivalenti e quindi vi sono altre $\binom{3}{2}=3$ frecce possibili, così come per i sintomi equivalenti A, B, C, D ed E che aggiungono altre $\binom{5}{2}=10$ frecce e i sintomi G, H e I che ne aggiungono altre $\binom{3}{2}=3$.

In totale abbiamo $66+3+10+3=82$ possibili implicazioni.

12. ERRORI SPAZIALI [4] Claudia Manotti

Supponiamo di aver scritto correttamente la sequenza di Fibonacci (F_i) fino all'indice $j-1$ e di aver, inavvertitamente, aumentato di 1 l'indice j. La nostra sequenza continuerà nel modo seguente:

$\overline{F_j} = F_j + 1;$

$\overline{F_{j+1}} = F_{j-1} + \overline{F_j} = F_{j-1} + F_j + 1 = F_{j+1} + 1;$

$\overline{F_{j+2}} = \overline{F_{j+1}} + \overline{F_j} = F_{j+1} + 1 + F_j + 1 = F_{j+2} + 2$

$\overline{F_{j+3}} = \overline{F_{j+2}} + \overline{F_{j+1}} = F_{j+2} + 2 + F_{j+1} + 1 = F_{j+3} + 3$

…

In generale si osserva che $\overline{F_k} = F_k + F_h$

Scrivendo i primi termini delle sequenza di Fibonacci, si osserva che $1830 = 1597 + 233 = F_{16} + F_{12}$.

L'errore è stato commesso all'indice $j = 16 - 12 = 4$.

13. NEW MARS VEGAS [5814] Carlo Càssola

Detti a, b e c i lati del parallelepipedo originale, deve accadere che $a+2=b+3=c+4$, cioè che $b=a-1$ e $c=a-2$.

L'aumento di volume può essere scritto $(a+2)(b+3)(c+4)-abc=3447$. Sostituendo le informazioni appena ricavate si ottiene $(a+2)^3 - a(a-1)(a-2) = 3447$ che semplificata diventa $9a^2+10a-3439=0$, la cui soluzione positiva è $a=19$. Segue che $b=18$ e $c=17$.

Il volume originale era $abc = 19\cdot 18\cdot 17 = 5814\ \text{m}^3$.

14. IL PIANETA SMULLYAN [650] Sandro Campigotto

Il sindaco ha sicuramente affermato "io sono un erov" visto che la frase "io sono un oslaf" non potrebbe pronunciarla nessun abitante del pianeta.

Una delegazione formata da un numero pari di abitanti ha affermato "gli altri sono oslaf" che ci assicura che uno di loro è "erov" e gli altri no.

Una delegazione formata da un numero dispari di abitanti ha affermato che "gli altri sono erov". Cosa che può accadere solo se sono o tutti dei mentitori o tutti sinceri.

A questo punto, il massimo numero di abitanti sinceri si ha quando le delegazioni dispari sono formate da tutti "erov" e le delegazioni pari da un solo "erov". Anche il sindaco, risulta essere un "erov".

In totale avremo $25+1+3+5+...+49 = 25+25^2 = 650$ abitanti sinceri.

15. BEULER'S GAME 2 [127] Sandro Campigotto

Risolviamo il caso generale.

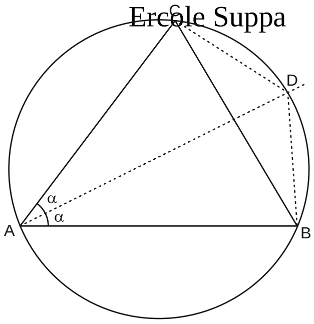
Osserviamo che se abbiamo k mosse "$\nearrow$", ne abbiamo altrettante "$\searrow$". Le restanti n sono del tipo "$\rightarrow$". Le prime $2k$ mosse devono essere fatte in modo da non avere più mosse a scendere di quelle a salire e abbiamo C_k modi per farlo (C_k è in k-esimo numero di Catalan). Se abbiamo $2k+n$ mosse da fare, si tratta solo di stabilire in che punto della sequenza fare le n mosse orizzontali.

In generale avremo $\binom{2k+n}{n} C_k$ modi.

Risolviamo ora il problema assegnato: dividiamo il calcolo per casi.

Mosse $\nearrow$	Mosse $\searrow$	Mosse $\rightarrow$	Percorsi possibili
0	0	7	1
1	1	5	$\binom{7}{5} C_1 = 21$
2	2	3	$\binom{7}{3} C_2 = 70$
3	3	1	$\binom{7}{1} C_3 = 35$
		TOTALE	127

16. FRATTURE DELLO SPAZIO [336] Ercole Suppa



Per il Teorema della corda, $DC = BD$ e quindi $AD = 2DC$.
Per il Teorema di Tolomeo deve accadere che $AC \cdot BD + AB \cdot DC = AD \cdot BC$. Per quanto appena osservato, la relazione diventa

$$AC \cdot \cancel{DC} + AB \cdot \cancel{DC} = 2\cancel{DC} \cdot BC$$

da cui segue che $BC = 28$ Km.
L'area del triangolo possiamo trovarla direttamente con la formula di Erone:

$$A = \sqrt{42 \cdot (42-30)(42-28)(42-26)} = \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = \sqrt{2^8 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 336 \text{ km}^2.$$

17. MORDAGLIA [3456] Rosanna Tupitti

Prima soluzione

Stiamo cercando i numeri di dieci cifre $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ ($a_i \neq a_i$ per $i \neq j$ e $a_9 \neq 0$) divisibili per 11111, cioè $\sum_{i=0}^{9} 10^i a_i \equiv 0 \bmod 11111$. Osserviamo che $100000 = 99999 + 1 \equiv 1 \bmod 11111$ e quindi

$$\sum_{i=0}^{9} 10^i a_i \equiv a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + 10000a_4 + a_5 + 10a_6 + 100a_7 + 1000a_8 + 10000a_9 =$$

$$= (a_0 + a_5) + 10(a_1 + a_6) + 100(a_2 + a_7) + 1000(a_3 + a_8) + 10000(a_4 + a_9).$$

Dimentichiamo, per un attimo, la condizione $a_9 \neq 0$. Dovendo usare tutte e 10 le cifre, dovrà accadere che le cinque somme tra parentesi siano tutte uguali, cioè valgano tutte 9. Avendo 5 possibili coppie ($(9;0)$ $(8;1)$ $(7;2)$ $(6;3)$ $(5;4)$), abbiamo in tutto $5! \cdot 2^5 = 3840$ numeri possibili.
Dobbiamo ora togliere i casi in cui abbiamo posto $a_9 = 0$, cioè quando abbiamo scelto la coppia $(9;0)$ per la prima partentesi e abbiamo selezionato lo 0 per la cifra più significativa. Sono: $4! \cdot 2^4 = 384$.
I numeri possibili sono $3840 - 384 = 3456$.

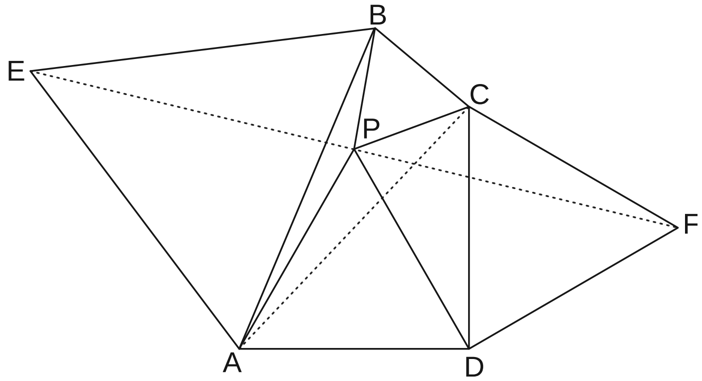
Seconda soluzione

Stiamo cercando i numeri di dieci cifre tutte diverse, $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$, divisibili per 11111.
Siccome la somma delle possibili cifre è 45, il numero risulta divisibile anche per 9 e quindi il numero deve essere divisibile per 99999.

$$\overline{a_9a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = 10^5 \cdot \overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = 99999 \cdot \overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}.$$

Siccome la prima parte è divisibile per 99999, allora anche $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$ lo deve essere.
Osserviamo che $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} < 99999 + 99999 = 2 \cdot 99999$ e quindi deve accadere che $\overline{a_9a_8a_7a_6a_5} + \overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = 99999$.
Contiamo quante possibilità abbiamo:
a_9 ha 9 possibilità (lo 0 non è permesso) e di conseguenza resta determinata anche la cifra a_0 visto che $a_9 + a_0 = 9$.
a_8 ha 8 possibilità e di conseguenza resta determinata anche la cifra a_1;
a_7 ha 6 possibilità e di conseguenza resta determinata anche la cifra a_2 e via di seguito.
In totale abbiamo $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$ numeri possibili.

18. TRAIETTORIE NELLO SPAZIO [58] Rosanna Tupitti



Consideriamo la rotazione di centro D e di angolo $60°$ che porta P in A ed F in C. Segue che $AC = PF$ e che l'angolo acuto tra AC e PF è di $60°$.
Consideriamo la rotazione di centro B e di angolo $60°$ che porta E in A e P in C. Segue che $AC = EP$ e che l'angolo acuto tra EP e AC è di $60°$.
Abbiamo scoperto che E, P e F sono allineati e che $EF = 2AC$.
Per il teorema di Pitagora, $AC = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29 \text{ anni luce}$.
$EF = 2 \cdot 29 = 58 \text{ anni luce}$.

19. IL MUSEO DELLE TESTE [5461] Ercole Suppa

Calcoliamo le composizioni di un numero n senza vincoli.
Possiamo pensare n nella forma $\underbrace{1+1+1+1+...+1}_{n}$ e pensare alle composizioni come ai modi di togliere i segni "$+$", cosa che possiamo fare in $\binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-3} + ... + \binom{n-1}{0} = 2^{n-1}$ modi.
Dividiamo ora il problema in casi, fissando l'ultimo valore:

ultimo valore	Numeri restanti	composizioni
1	13	2^{12}
3	11	2^{10}
5	9	2^8
7	7	2^6
9	5	2^4
11	3	2^2
13	1	$2^0 = 1$

Le possibili composizioni sono $1 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{12} = 1 + 4 + 4^2 + ... + 4^6 = \frac{4^7 - 1}{4 - 1} = 5461$

20. BEULER'S GAME 3 [7776] Sandro Campigotto

Osserviamo che una volta stabilito a che altezza fare le mosse in orizzontale, le altre sono obbligate. Per arrivare sull'ultima colonna dobbiamo fare (prima o poi) 5 mosse orizzontali. Siccome ogni mossa orizzontale può essere fatta in 6 modi diversi, esistono $6^5 = 7776$.

21. SUONI SPAZIALI [124] Sandro Campigotto

Osserviamo che in generale $(x^n + x^{n-1} + ... + x + 1)(x-1) = x^{n+1} - 1$.

Moltiplicando ciascun fattore per $x-1$ otteniamo:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9) =$$

$$\frac{(x^6-1)(x^8-1)(x^{10}-1)}{(x-1)^3} = \frac{x^{24}-x^{18}-x^{16}-x^{14}+x^{10}+x^8+x^6-1}{(x-1)^3}$$

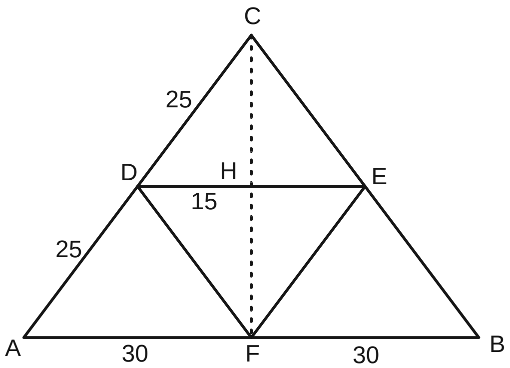
Usiamo la divisione con il metodo di Ruffini… (limitando il calcolo ai coefficienti interessati):

	1	0	0	0	0	0	–1	0	–1	0	–1	0	...
1		1	1	1	1	1	1	0	0	–1	–1	–2	...
	1	1	1	1	1	1	0	0	–1	–1	–2	–2	...
1		1	2	3	4	5	6	6	6	5	4	2	...
	1	2	3	4	5	6	6	6	5	4	2	0	...
1		1	3	4	10	15	21	27	33	38	42	44	...
	1	3	6	10	15	21	27	33	38	42	44	44	...
	x^{21}	x^{20}	x^{19}	x^{18}	x^{17}	x^{16}	x^{15}	x^{14}	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	...

$a = 44$, $b = 42$ e $c = 38$.

La soluzione richiesta è $44+42+38=124$

22. UNA CONSEGNA PROBLEMATICA [1984] Claudia Manotti

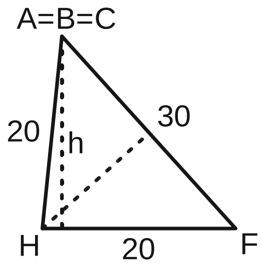


Lo sviluppo del tetraedro è il triangolo ABC riportato in figura ed è formato da quattro triangoli isosceli congruenti. Per calcolare il volume ci serve l'area di uno dei triangolini e l'altezza del tetraedro.

Tracciando AF, l'altezza relativa alla base AB osserviamo che il triangolo CDH risulta essere un triangolo rettangolo di ipotenusa 25 m e cateto 15 m. Per la nota terna pitagorica $(3,4,5)$, il restante cateto misura 20 m.

L'area di un triangolo risulta essere $A_{DEF} = \dfrac{30 \cdot 20}{2} = 300 \text{ m}^2$.

Possiamo ricavare l'altezza del solido pensando al triangolo che si forma costruendo il tetraedro unendo i tre vertici A, B e C ed osservando il triangolo che si forma tra i segmenti CH, HF e FA.



L'altezza h cercata è l'altezza del triangolo AHF relativa al lato HF.

Sfruttando ancora una volta il fatto che il triangolo è isoscele, si ottiene che l'altezza relativa al lato AF misura $\sqrt{20^2-15^2} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$ e quindi $h = \dfrac{30 \cdot 5\sqrt{7}}{20} = \dfrac{15\sqrt{7}}{2}$

Il volume cercato risulta $V = \dfrac{1}{3} \cdot 300 \cdot \dfrac{15}{2}\sqrt{7} = 750\sqrt{7} \text{ m}^3 = 1984,35 \text{ m}^3$.

23. OMICIDIO SUL PLANAR EXPRESS [7406] Sandro Campigotto

Considero il seguente prodotto:

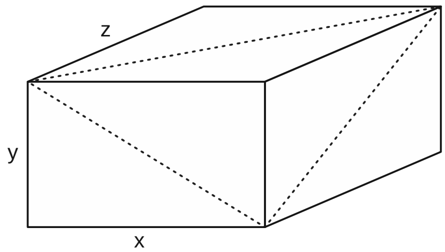
$$P=(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)$$

Applicando la proprietà distributiva, senza eseguire i calcoli si ottiene $0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot1+0\cdot0\cdot2+...+9\cdot9\cdot9$.

Se al posto dell'operazione "prodotto" sostituissi l'operazione "affianca le cifre", avrei tutti i numeri naturali da 0 a 999. Per risolvere il problema assegnato, nel quale $p(n)$ è il prodotto delle cifre non nulle, mi basta sostituire alla cifra "0" la cifra "1", e visto che mi interessano solo i numeri pari, utilizzo solo le cifre pari nell'ultima parentesi.

$$\sum_{i=1}^{500}\frac{P(2i)}{6}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{500}P(2i)=\frac{1}{6}(1+1+2+3+..+9)(1+1+2+3+...+9)(1+2+4+6+8)=\frac{46^2\cdot21}{6}=7406\cdot$$

24. L'ULTIMO UOVO [2800] Carlo Càssola



Proiettiamo un parallelepipedo di lati x, y e z su uno schermo: l'ombra che si ottiene avrà una forma esagonale, simile a quella della figura a lato riportata.
Tracciando le diagonali delle tre facce visibili si osserva che l'area occupata dall'ombra è esattamente il doppio dell'area del triangolo.
L'area del triangolo risulta massima, quando i raggi sono perpendicolari ad essa.

Calcoliamo l'area di un triangolo di lati $a=\sqrt{x^2+y^2}$, $b=\sqrt{x^2+z^2}$ e $c=\sqrt{y^2+z^2}$.

Per Erone $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}=$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2+b^2+2ab-c^2\right)\left(c^2-a^2-b^2+2ab\right)}=$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4(x^2+y^2)(x^2+z^2)-(x^2\cancel{+y^2}+x^2\cancel{+z^2}\cancel{-y^2}\cancel{-z^2})^2}=$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\cancel{4x^4}+4x^2y^2+4x^2z^2+4y^2z^2\cancel{-4x^4}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$$

L'area dell'ombra vale $A_{ombra}=\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$.

Nel caso del problema assegnato $A_{ombra}=\sqrt{20^2\cdot40^2+20^2\cdot60^2+40^2\cdot60^2}=100\sqrt{8^2+12^2+24^2}=2800\text{ mm}^2$.