

XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – 9 Maggio 2014



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- **I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].**
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Le prime Olimpiadi

Pochi sanno che, come il loro equivalente sportivo, anche le Olimpiadi della Matematica furono inventate nell'antica Grecia; esse erano intitolate, giustamente, agli dei dell'Olimpo della Matematica. La specialità dei Greci era la geometria; difatti si incontravano esercizi come questo: "Sia ABC un triangolo acutangolo con $AC > CB$. Siano CD la mediana uscente da C , CH l'altezza relativa alla base AB , E e F i punti di intersezione della perpendicolare ad AB passante per D rispettivamente con la parallela ad AB passante per C e il lato AC . Sapendo che $HB = DH$ dire quanto vale il rapporto tra le aree dei triangoli HBC e CEF ". Sapreste risolverlo anche voi?

2. Il consesso degli dei

Tra gli dei dell'Olimpo della Matematica, alcuni sono mentitori e dicono sempre il falso, mentre gli altri dicono sempre la verità. Una volta ad un consesso erano presenti 4029 dei, seduti ad intervalli regolari ad un tavolo circolare. A un certo punto, ognuno di loro contemporaneamente puntò il dito accusatore verso i due immortali seduti proprio di fronte a sé dal lato opposto del tavolo ed esclamò: "Quei due sono mentitori!". Quanti di loro, come minimo, dicevano la verità?

3. Il matrimonio degli dei

Al matrimonio di ζ eus e Zera sono invitati un gran numero di dei, ognuno accompagnato dal proprio coniugato, per un totale di meno di 10000 coppie; GARCHimede, il coppiere, è incaricato di dividerli in tavoli. Egli innanzitutto fa sedere ogni coppia a un tavolo da due persone. Poi unisce questi tavoli a coppie per formare tavoli da quattro persone, lasciando in piedi se necessario le due persone sedute ad un eventuale tavolo che avanza. Poi unisce questi tavoli a coppie per formare tavoli da otto persone, lasciando in piedi se necessario le quattro persone sedute in un eventuale tavolo spaiato. Continua in questo modo, unendo i tavoli a coppie e scartando l'ultimo se questi sono in numero dispari, fino a formare un unico grande tavolo. A questo punto si accorge che sono rimasti in piedi esattamente 2014 tra dei e dee che non hanno un posto al tavolo. Quante coppie sono state invitate, al massimo?

4. Numeri sacri

A Mathena sono sacri il 9 e tutti i numeri che verificano una di queste due condizioni: o (i) finiscono per 9 e la cifra delle decine è pari, oppure (ii) la cifra delle decine è dispari e la somma tra la cifra delle decine e quella delle unità è pari a 10. Quanto vale la somma di tutti i numeri sacri minori di 10000?

5. [★] Appendice alla Sϕnge

Dopo il celebre problema dell'animale che cammina con n zampe, la Sϕnge pose un altro quesito ad Edipòlo: "C'è una sequenza a_1, a_2, \dots, a_{28} di numeri reali non negativi tale che $a_{2k} = \frac{1}{2}a_k$ per ogni k tra 1 e 14. La somma di tutti i suoi termini fa 2014; inoltre la somma dei primi quattordici termini è 990. Trova il massimo valore che può avere la somma a segni alterni $a_1 - a_2 + \dots + a_{27} - a_{28}$." Sapreste aiutare Edipòlo a risolvere il problema?

6. Gli anni d'oro

Come pagamento per le sue piccanti consulenze, ζ eus ha concesso all'indovino Teoresia questa ricompensa. ζ eus consegna a Teoresia 25 monete d'oro, e questi deve dividerle in diversi gruppi, ognuno contenente almeno una moneta. ζ eus concederà a Teoresia N anni di vita, dove N è il prodotto del numero di monete presenti in ogni gruppo (per esempio, se l'indovino restituisce due gruppi da 12 e 13 monete, viene ricompensato con 156 anni di vita). Qual è il massimo numero N che Teoresia può ottenere?

7. I Desargonauti

I 35 Desargonauti si imbarcarono su tre navi alla ricerca del Vello d'Oro. Tra di loro c'erano 10 spartiniiani, che volevano

viaggiare tutti sulla stessa nave, e 8 matheniesi, che volevano anche loro viaggiare tutti insieme. La nave maestra, Desargo, poteva contenere 15 persone, e due navi minori, diverse ma di dimensioni simili, ne contenevano 10 ciascuna. In quanti modi diversi potevano dividersi tra le varie navi?

8. Otto Per Seo

Prima di imparare a filare, le Moivre determinavano il fato degli uomini più banalmente estraendo palline da un'urna. Per stabilire il destino di PerSeo, misero 8 palline numerate con i numeri da 1 a 8 in una scatola, e ne estrassero a caso 4 contemporaneamente. Esse avevano deciso che PerSeo sarebbe riuscito a sposare Andromeda solo se la somma dei numeri estratti fosse stata maggiore di 17. Qual era la probabilità che ciò avvenisse? *Si risponda fornendo la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

9. Pocket Temple

Il mini-tempio di Mathena è formato da una base quadrata di lato 1 m al cui interno stanno due colonne uguali, ognuna con base un cerchio. Quanti millimetri può misurare, al massimo, il raggio delle due colonne?

10. La punizione di Ψsifo

Come punizione per aver sfidato gli dei, Ψsifo fu condannato a fare conti di combinatoria per 2014 giorni di fila. Gli vennero date 2014 palline e 2014 scatole, sia le palline che le scatole numerate con numeri distinti da 1 a 2014; nel giorno N , per ogni N tra 1 e 2014, egli doveva calcolare il numero di modi diversi di disporre le palline nelle scatole, una per scatola, in modo che le palline numerate da 1 a N fossero nelle scatole riportanti il numero corrispondente, e quelle da $N + 1$ a 2014 invece fossero ognuna in una scatola riportante un numero diverso dal proprio. Per quanti dei 2014 giorni Ψsifo dovette rispondere un numero pari?

11. [★] Crogiolarsi nel lusso

Ehrenfest, l'ingegnere degli dei, aveva degli automi che lo aiutavano a forgiare il bronzo nella sua officina. Uno di essi, ogni mattina, guardava quante onces di bronzo c'erano nel crogiolo del dio; se questo numero era multiplo di 3 ne aggiungeva una, altrimenti tirava un dado a 8 facce e ne aggiungeva tante quante il numero uscito. Un secondo automa ogni sera guardava quante onces di bronzo c'erano nel crogiolo, e se questo numero era multiplo di tre usava parte del metallo per forgiare una spada del peso di tre onces. Sapendo che questa notte il crogiolo contiene 9 onces di bronzo, qual è la probabilità che nei prossimi venti giorni (20 mattine e 20 sere) vengano forgiate esattamente cinque spade? *Dare come risultato il numero di divisori positivi del numeratore della frazione ridotta ai minimi termini.*

12. Il vaso di P-and-or-a

Sebbene sia la beniamina di tutti gli dei, la figlia del dio Apollonio è una gran combinaguai! Mathena le ha rivelato la combinazione per sigillare il vaso di P-and-or-a, ma lei l'ha dimenticata. Si ricorda solo che è un quadrato perfetto, mentre il suo amico Erős si ricorda che era scrivibile come $n^3 + 3n$ per un qualche n naturale. Sapreste aiutarla, sapendo che la combinazione è il più grande numero intero con meno di 6 cifre ad avere queste proprietà?

13. L'altare di Dehno

Trovando troppo difficile il problema della duplicazione del cubo, il dio Apollonio ha dato agli abitanti di Dehno questo ordine più facile: devono costruire quattro altari cubici, ognuno avente come lato un diverso numero intero di cubiti; inoltre, il volume dell'altare più grosso dev'essere uguale alla somma dei volumi degli altri tre. Qual è il minimo valore che può assumere il volume, in cubiti cubi, del cubo più grande?

14. [★] Giochi senza parte interna

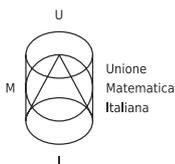
Forse non tutti sanno che i Greci avevano già inventato alcuni giochi con la scacchiera simili alla dama. Uno dei giochi si svolgeva su una scacchiera 8×8 , con righe e colonne numerate da 1 a 8, da cui erano eliminate tre caselle: quella in posizione (2,2), quella in posizione (4,3) e quella in posizione (3,5). Il primo giocatore doveva scegliere un rettangolo, con i vertici coincidenti con vertici di caselle della scacchiera e i lati paralleli ai bordi, che non contenesse al proprio interno alcuna delle caselle eliminate. Quante sono le diverse mosse a lui possibili?

15. [★] Specchi ustori

Il grande Archimede ha fatto costruire attorno alla città di Siracusa due grossi specchi circolari concentrici per i suoi esperimenti. Archimede lancia un raggio di luce a partire dal porto, che si trova sullo specchio più esterno, in modo che colpisca lo specchio interno per la prima volta in un punto fissato, corrispondente alla posizione del tempio di Mathena (il porto e il tempio non sono allineati con il centro degli specchi). Il raggio si divide in tanti raggi diversi, perché lo specchio più interno è semiriflettente: cioè, quando viene colpito da un raggio di luce quest'ultimo si divide in due raggi, uno che viene riflesso e uno che attraversa lo specchio senza mutare direzione. Al loro 2014° contatto con uno specchio (contando come primo contatto quello in corrispondenza del tempio), i raggi svaniscono. Archimede nota che esistono due punti A e B tali che ogni possibile percorso dei raggi termina in uno di essi, e inoltre che il percorso più lungo possibile misura il doppio di quello più corto. Quanto vale il rapporto tra i raggi dei due specchi? *Si risponda indicando la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

16. [★] Sopra questo scudo

Ognuno dei 300 soldati dell'esercito di Spartin ha un numero scritto sullo scudo; questo numero è pari al numero di zeri con cui termina $n!$, dove n varia da 1 a 300. Quindi, per esempio, l'ultimo soldato $n = 300$ ha sullo scudo il numero 74, perché 300! termina con 74 zeri. Sugli scudi degli Spartini però non compaiono tutti i numeri naturali tra 0 e 74, ma ne mancano alcuni. Qual è la somma di tutti i numeri mancanti?



Unione
Matematica
Italiana



XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale A – Soluzioni – 9 Maggio 2014



ZANICHELLI

Nr.	Problema	Soluzione
1	Le prime Olimpiadi	0003
2	Il consesso degli dei	1343
3	Il matrimonio degli dei	9199
4	Numeri sacri	2000
5	[*]Appendice alla Sϕnge	1024
6	Gli anni d'oro	8748
7	I Desargonauti	5984
8	Otto Per Seo	0109
9	Pocket Temple	0292
10	La punizione di Ψsifo	1007
11	[*]Crogiolarsi nel lusso	0840
12	Il vaso di P-and-or-a	1764
13	L'altare di Dehno	0216
14	[*]Giochi senza parte interna	0696
15	[*]Specchi ustori	3019
16	[*]Sopra questo scudo	0556

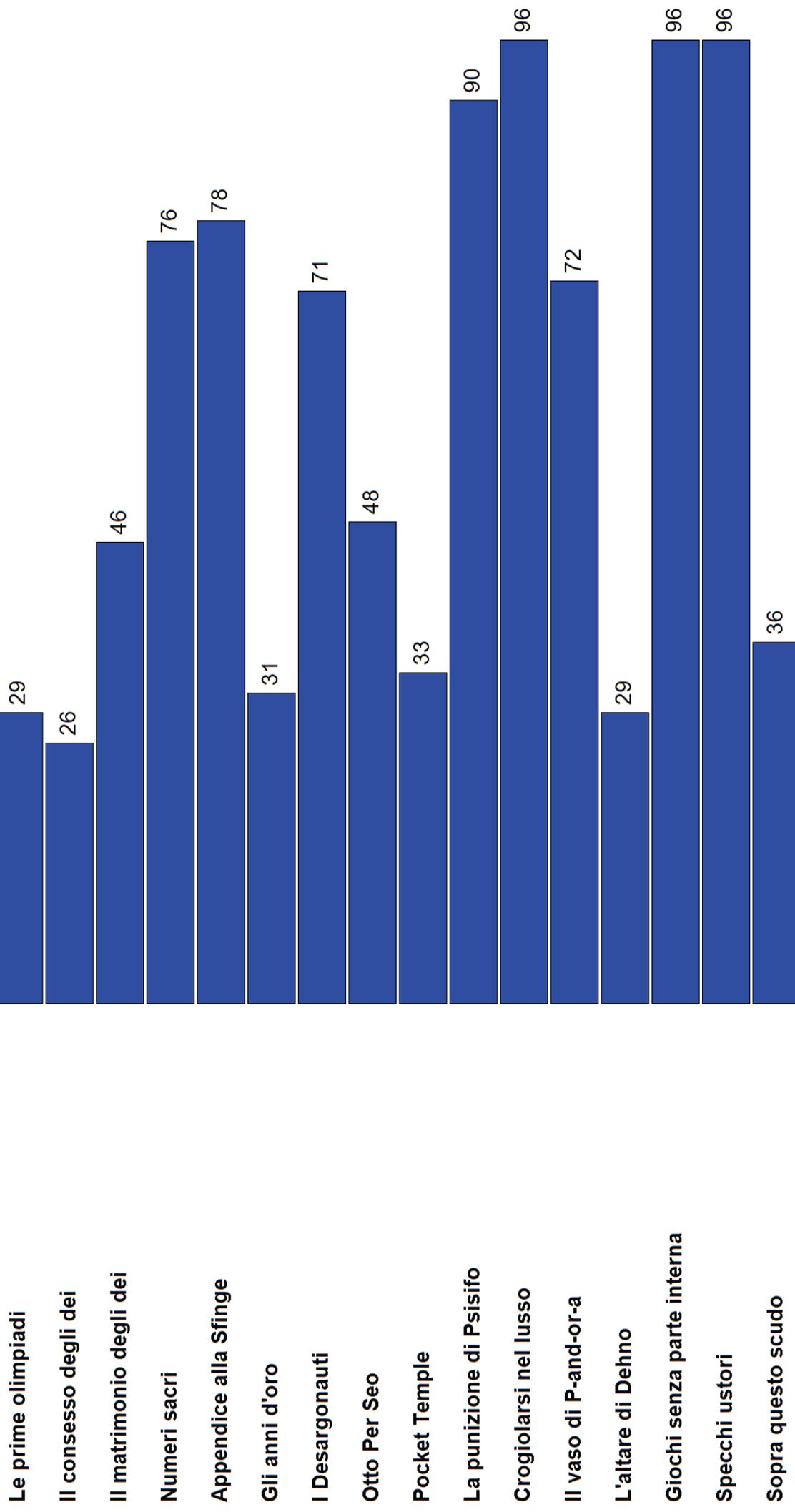
Semifinale A - Classifica finale squadre

		Golgi, Breno	893
		Jacopo da Ponte, Bassano del Grappa	810
		Moro, Reggio Emilia	761
		Stampacchia, Tricase	733
		Grassi, Lecco	715
		Paschini, Tolmezzo	714
		Marconi, Conegliano	712
		Fermi, Bologna	603
		Volta, Foggia	598
		Rosmini, Rovereto	583
		Spano, Sassari	571
		Telese, Telesse Terme	549
		Corradini, Thiene	545
		502 Majorana, Isernia	
		501 Messedaglia, Verona	
		499 Bocchi-Galilei, Adria	
		455 Barsanti-Matteucci, Viareggio	
		398 Redi, Arezzo	
		377 Fermi, Nuoro	
		374 Belfiore, Mantova	
		373 Scarpa, Motta di Livenza	
		346 Einaudi, Siracusa	
		333 Spinelli, Torino	
		290 Leonardo, Giarre	
		286 Newton, Roma	
		271 Zanelli, Reggio Emilia	
		250 Bagatta, Desenzano del Garda	
		240 Fermi, Montesarchio	
		147 Fermi, Cosenza	

Semifinale A - Stato squadre

01) Volta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
02) Stampacchia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
03) Spano	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2	13	14	15	16
04) Redi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
05) Moro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
06) Leonardo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
07) Jacopo da Ponte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
08) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
09) Rosmini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
10) Paschini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
11) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2	13	14	15	16
12) Grassi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
13) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
14) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
15) Einaudi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
16) Bocchi-Gallei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
17) Newton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
18) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
19) Golgi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
20) Barsanti-Matteucci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
21) Telese	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
22) Belfiore	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2	13	14	15	16
23) Zanelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
24) Corradini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
25) Bagatta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
26) Scarpa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
27) Spinelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
28) Messedaglia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
29) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	

Semifinale A - Classifica domande

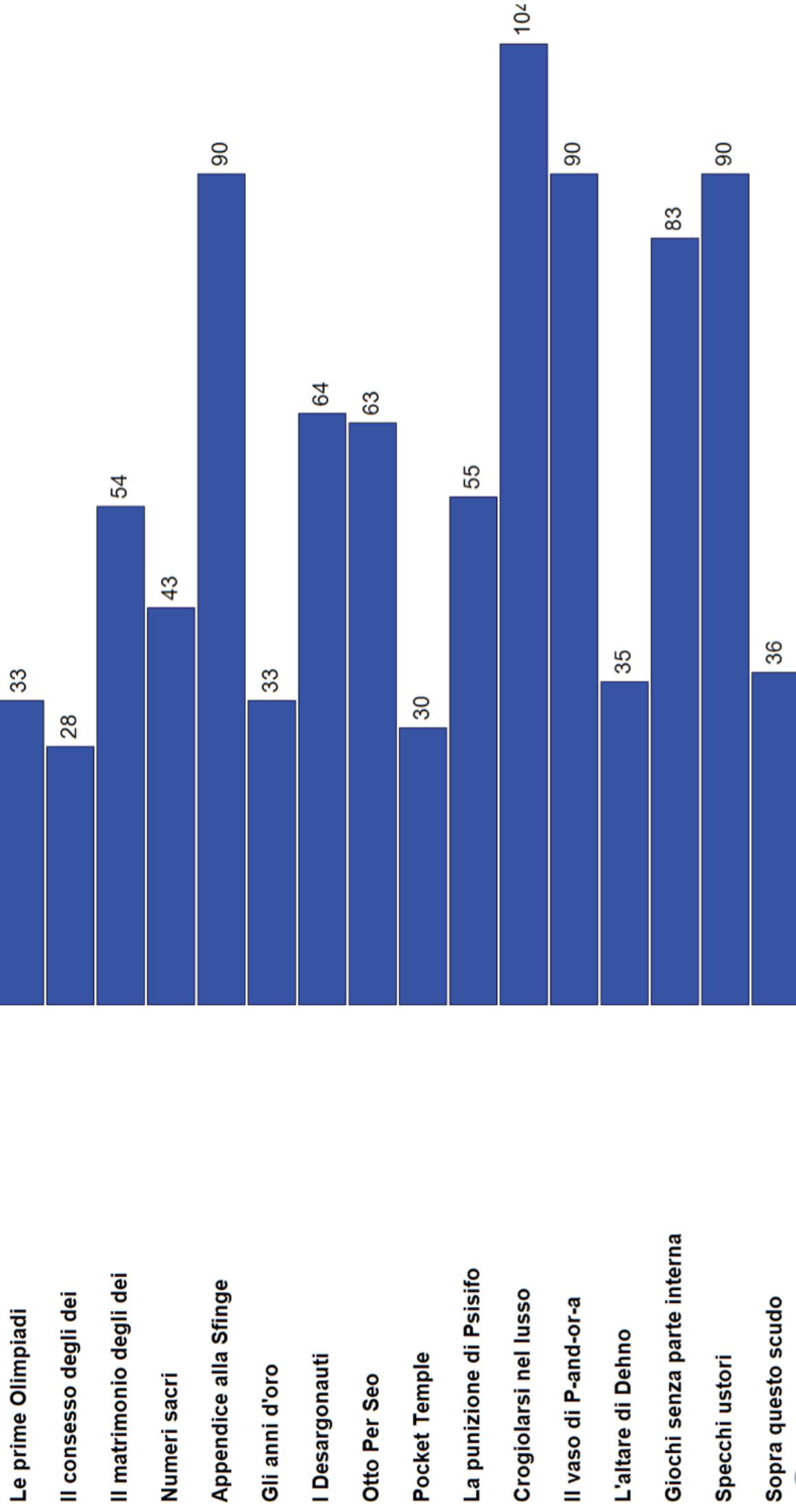


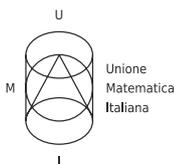
Cattaneo, Torino	821
Pacinotti, La Spezia	770
Copernico, Udine	768
Majorana, Brindisi	728
Ferraris, Torino	703
Righi, Roma	682
Copernico, Torino	665
Gandhi, Narni	653
Leonardo da Vinci, Firenze	631
Mascheroni, Bergamo	605
Moretti-Eretha, Gardone Val Trompia	565
Tron, Schio	528
Battaglini, Taranto	508
Leopardi, Recanati	491
Marconi, Parma	471
Oberdan, Trieste	457
Saffo, Roseto degli Abruzzi	438
Agnesi, Merate	437
Rinaldo Corso, Correggio	423
Cannizzaro, Palermo	399
Marconi, Chiavari	396
Oliveti, Locri	378
Farinato, Enna	374
King, Genova	313
Mariano IV, Oristano	299
Galilei, Manfredonia	295
Paulucci di Calboli, Forlì	293
Mattioli, Vasto	237

Semifinale C - Stato squadre

01) Battaglioni	1	2	13	4	5	6	7	28	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Farinato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Leonardo da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Leopardi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Mattioli	1	2	3	4	5	6	7	18	2	9	10	11	12	13	14	16
08) Oliveti	1	2	3	4	5	6	7	28	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Paulucci di Calboli	1	2	3	4	5	6	7	18	19	10	11	12	13	14	15	16
10) Cannizzaro	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16
11) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16
12) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16
13) Mariano IV	1	2	3	4	5	6	7	18	19	10	11	12	13	14	15	16
14) Righi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) Saffo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Agnesi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Ferraris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Gandhi	1	2	3	4	5	6	7	18	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Mascheroni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Oberdan	1	2	3	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16
22) Rinaldo Corso	1	2	3	4	5	6	7	28	19	10	11	12	13	14	15	16
23) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Pacinotti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Cattaneo	1	2	3	4	5	6	7	3	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	3	9	10	11	12	13	14	15	16
27) Tron	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16
28) Moretti-Beretta	1	2	3	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16
29) King	1	2	3	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16

Semifinale C - Classifica domande





XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – 9 Maggio 2014



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- **I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].**
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Le prime Olimpiadi

Pochi sanno che, come il loro equivalente sportivo, anche le Olimpiadi della Matematica furono inventate nell'antica Grecia; esse erano intitolate, giustamente, agli dei dell'Olimpo della Matematica. La specialità dei Greci era la geometria; difatti si incontravano esercizi come questo: "Sia ABC un triangolo acutangolo con $AC > CB$. Siano CD la mediana uscente da C , CH l'altezza relativa alla base AB , E e F i punti di intersezione della perpendicolare ad AB passante per D rispettivamente con la parallela ad AB passante per C e il lato AC . Sapendo che $HB = 2DH$ dire quanto vale il rapporto tra le aree dei triangoli HBC e CEF ". Sapreste risolverlo anche voi?

2. Il matrimonio degli dei

Al matrimonio di Zeus e Zera sono invitati un gran numero di dei, ognuno accompagnato dal proprio coniugato, per un totale di meno di 10000 coppie; GARCHimede, il coppiere, è incaricato di dividerli in tavoli. Egli innanzitutto fa sedere ogni coppia a un tavolo da due persone. Poi unisce questi tavoli a coppie per formare tavoli da quattro persone, lasciando in piedi se necessario le due persone sedute ad un eventuale tavolo che avanza. Poi unisce questi tavoli a coppie per formare tavoli da otto persone, lasciando in piedi se necessario le quattro persone sedute in un eventuale tavolo spaiato. Continua in questo modo, unendo i tavoli a coppie e scartando l'ultimo se questi sono in numero dispari, fino a formare un unico grande tavolo. A questo punto si accorge che sono rimasti in piedi esattamente 2014 tra dei e dee che non hanno un posto al tavolo. Quante coppie sono state invitate, al massimo?

3. Il consesso degli dei

Tra gli dei dell'Olimpo della Matematica, alcuni sono mentitori e dicono sempre il falso, mentre gli altri dicono sempre la verità. Una volta ad un consesso erano presenti 4035 dei, seduti ad intervalli regolari ad un tavolo circolare. A un certo punto, ognuno di loro contemporaneamente puntò il dito accusatore verso i due immortali seduti proprio di fronte a sé dal lato opposto del tavolo ed esclamò: "Quei due sono mentitori!". Quanti di loro, come minimo, dicevano la verità?

4. Gli anni d'oro

Come pagamento per le sue piccanti consulenze, Zeus ha concesso all'indovino Teoresia questa ricompensa. Zeus consegna a Teoresia 22 monete d'oro, e questi deve dividerle in diversi gruppi, ognuno contenente almeno una moneta. Zeus concederà a Teoresia N anni di vita, dove N è il prodotto del numero di monete presenti in ogni gruppo (per esempio, se l'indovino restituisce due gruppi da 12 e 10 monete, viene ricompensato con 120 anni di vita). Qual è il massimo numero N che Teoresia può ottenere?

5. Numeri sacri

A Mathena sono sacri il 9 e tutti i numeri che verificano una di queste due condizioni: o (i) finiscono per 9 e la cifra delle decine è dispari, oppure (ii) la cifra delle decine è pari e la somma tra la cifra delle decine e quella delle unità è pari a 9. Quanto vale la somma di tutti i numeri sacri minori di 10000?

6. [★] Appendice alla Sϕnge

Dopo il celebre problema dell'animale che cammina con n zampe, la Sϕnge pose un altro quesito ad Edipòlo: "C'è una sequenza a_1, a_2, \dots, a_{28} di numeri reali non negativi tale che $a_{2k} = \frac{1}{2}a_k$ per ogni k tra 1 e 14. La somma di tutti i suoi termini fa 2014; inoltre la somma dei primi quattordici termini è 1348. Trova il massimo valore che può avere la somma a segni alterni $a_1 - a_2 + \dots + a_{27} - a_{28}$." Sapreste aiutare Edipòlo a risolvere il problema?

7. Otto Per Seo

Prima di imparare a filare, le Moivre determinavano il fato degli uomini più banalmente estraendo palline da un'urna. Per stabilire

il destino di Perseo, misero 8 palline numerate con i numeri da 1 a 8 in una scatola, e ne estrassero a caso 4 contemporaneamente. Esse avevano deciso che Perseo sarebbe riuscito a sposare Andromeda solo se la somma dei numeri estratti fosse stata maggiore di 17. Qual era la probabilità che ciò avvenisse? *Si risponda fornendo la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

8. I Desargonauti

I 35 Desargonauti si imbarcarono su tre navi alla ricerca del Vello d'Oro. Tra di loro c'erano 10 spartiniani, che volevano viaggiare tutti sulla stessa nave, e 8 matheniesi, che volevano anche loro viaggiare tutti insieme. La nave maestra, Desargo, poteva contenere 15 persone, e due navi minori, diverse ma di dimensioni simili, ne contenevano 10 ciascuna. In quanti modi diversi potevano dividersi tra le varie navi?

9. Pocket Temple

Il mini-tempio di Mathena è formato da una base quadrata di lato 2 m al cui interno stanno due colonne uguali, ognuna con base un cerchio. Quanti millimetri può misurare, al massimo, il raggio delle due colonne?

10. La punizione di Ψsifo

Come punizione per aver sfidato gli dei, Ψsifo fu condannato a fare conti di combinatoria per 2014 giorni di fila. Gli vennero date 2014 palline e 2014 scatole, sia le palline che le scatole numerate con numeri distinti da 1 a 2014; nel giorno N , per ogni N tra 1 e 2014, egli doveva calcolare il numero di modi diversi di disporre le palline nelle scatole, una per scatola, in modo che le palline numerate da 1 a N fossero nelle scatole riportanti il numero corrispondente, e quelle da $N + 1$ a 2014 invece fossero ognuna in una scatola riportante un numero diverso dal proprio. Per quanti dei 2014 giorni Ψsifo dovette rispondere un numero dispari?

11. [★] Crogiolarsi nel lusso

Ehrenfest, l'ingegnere degli dei, aveva degli automi che lo aiutavano a forgiare il bronzo nella sua officina. Uno di essi, ogni mattina, guardava quante onces di bronzo c'erano nel crogiolo del dio; se questo numero era multiplo di 3 ne aggiungeva una, altrimenti tirava un dado a 8 facce e ne aggiungeva tante quante il numero uscito. Un secondo automa ogni sera guardava quante onces di bronzo c'erano nel crogiolo, e se questo numero era multiplo di tre usava parte del metallo per forgiare una spada del peso di tre onces. Sapendo che questa notte il crogiolo contiene 9 onces di bronzo, qual è la probabilità che nei prossimi venti giorni (20 mattine e 20 sere) vengano forgiate esattamente cinque spade? *Dare come risultato il numero di divisori positivi del numeratore della frazione ridotta ai minimi termini.*

12. Il vaso di P-and-or-a

Sebbene sia la beniamina di tutti gli dei, la figlia del dio Apollonio è una gran combinaguai! Mathena le ha rivelato la combinazione per sigillare il vaso di P-and-or-a, ma lei l'ha dimenticata. Si ricorda solo che è un quadrato perfetto, mentre il suo amico Erós si ricorda che era scrivibile come $n^3 + 3n$ per un qualche n naturale. Sapreste aiutarla, sapendo che la combinazione è il più grande numero intero con meno di 6 cifre ad avere queste proprietà?

13. L'altare di Dehno

Trovando troppo difficile il problema della duplicazione del cubo, il dio Apollonio ha dato agli abitanti di Dehno questo ordine più facile: devono costruire quattro altari cubici, ognuno avente come lato un diverso numero intero di cubiti; inoltre, il volume dell'altare più grosso dev'essere uguale alla somma dei volumi degli altri tre. Qual è il minimo valore che può assumere il volume, in cubiti cubi, del cubo più grande?

14. [★] Giochi senza parte interna

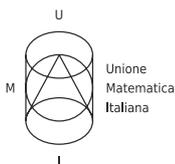
Forse non tutti sanno che i Greci avevano già inventato alcuni giochi con la scacchiera simili alla dama. Uno dei giochi si svolgeva su una scacchiera 8×8 , con righe e colonne numerate da 1 a 8, da cui erano eliminate tre caselle: quella in posizione (2,2), quella in posizione (4,3) e quella in posizione (3,5). Il primo giocatore doveva scegliere un rettangolo, con i vertici coincidenti con vertici di caselle della scacchiera e i lati paralleli ai bordi, che non contenesse al proprio interno alcuna delle caselle eliminate. Quante sono le diverse mosse a lui possibili?

15. [★] Sopra questo scudo

Ognuno dei 300 soldati dell'esercito di Spartin ha un numero scritto sullo scudo; questo numero è pari al numero di zeri con cui termina $n!$, dove n varia da 1 a 300. Quindi, per esempio, l'ultimo soldato $n = 300$ ha sullo scudo il numero 74, perché 300! termina con 74 zeri. Sugli scudi degli Spartiniani però non compaiono tutti i numeri naturali tra 0 e 74, ma ne mancano alcuni. Qual è la somma di tutti i numeri che compaiono sugli scudi, ognuno contato una volta sola?

16. [★] Specchi ustori

Il grande Archimede ha fatto costruire attorno alla città di Siracusa due grossi specchi circolari concentrici per i suoi esperimenti. Archimede lancia un raggio di luce a partire dal porto, che si trova sullo specchio più esterno, in modo che colpisca lo specchio interno per la prima volta in un punto fissato, corrispondente alla posizione del tempio di Mathena (il porto e il tempio non sono allineati con il centro degli specchi). Il raggio si divide in tanti raggi diversi, perché lo specchio più interno è semiriflettente: cioè, quando viene colpito da un raggio di luce quest'ultimo si divide in due raggi, uno che viene riflesso e uno che attraversa lo specchio senza mutare direzione. Al loro 1000° contatto con uno specchio (contando come primo contatto quello in corrispondenza del tempio), i raggi svaniscono. Archimede nota che esistono due punti A e B tali che ogni possibile percorso dei raggi termina in uno di essi, e inoltre che il percorso più lungo possibile misura il doppio di quello più corto. Quanto vale il rapporto tra i raggi dei due specchi? *Si risponda indicando la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*



Unione
Matematica
Italiana



XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – Soluzioni – 9 Maggio 2014



ZANICHELLI

Nr.	Problema	Soluzione
1	Le prime Olimpiadi	0008
2	Il matrimonio degli dei	9199
3	Il consesso degli dei	1345
4	Gli anni d'oro	2916
5	Numeri sacri	2000
6	[*]Appendice alla Sϕnge	666
7	Otto Per Seo	0109
8	I Desargonauti	5984
9	Pocket Temple	0585
10	La punizione di Ψsifo	1007
11	[*]Crogolarsi nel lusso	0840
12	Il vaso di P-and-or-a	1764
13	L'altare di Dehno	0216
14	[*]Giochi senza parte interna	0696
15	[*]Sopra questo scudo	2219
16	[*]Specchi ustori	1498

Semifinale B - Classifica finale squadre

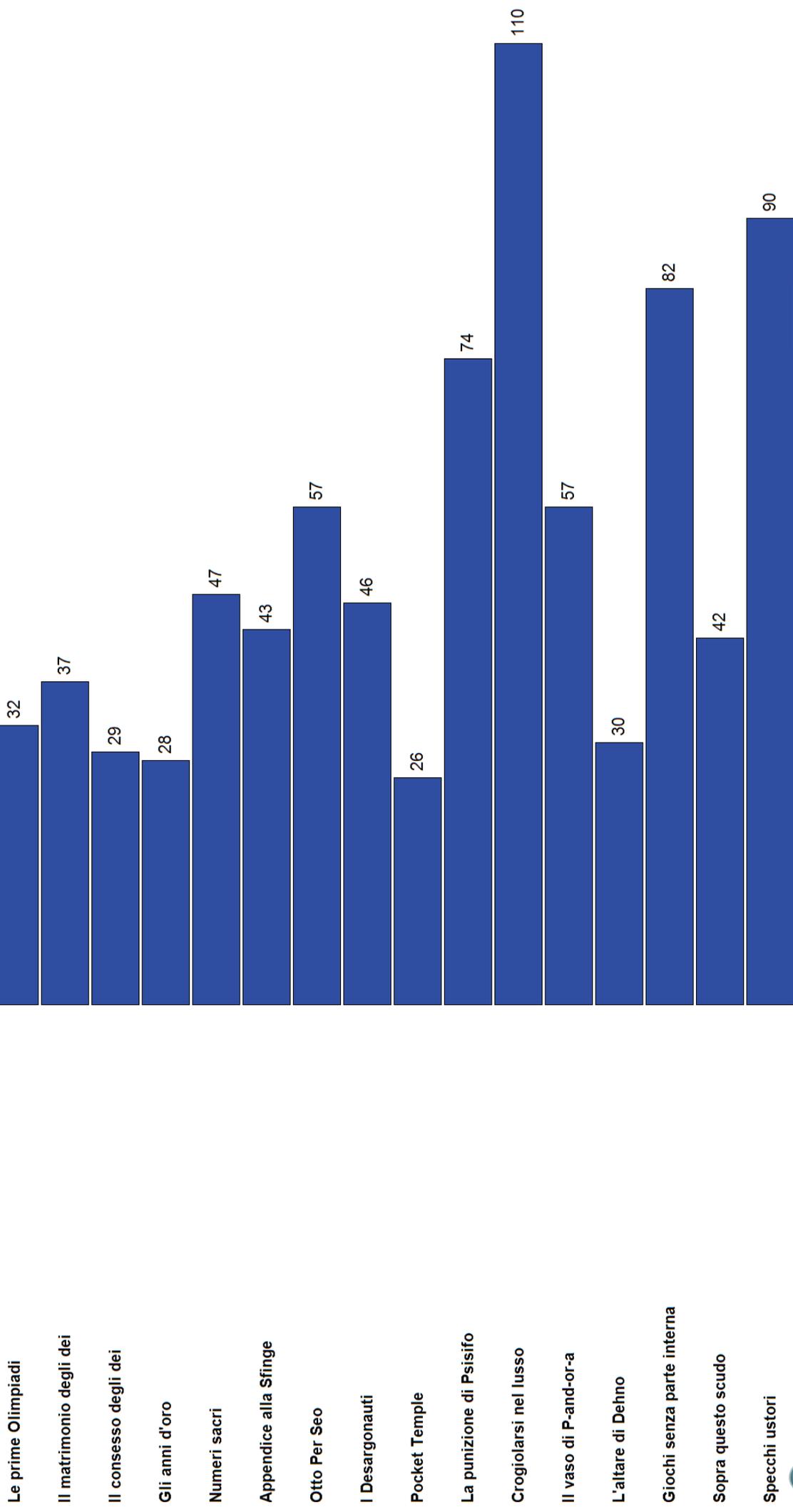
UU:UU

	Marconi, Carrara	889
	Marinelli, Udine	808
	Corni, Modena	773
	Newton, Chivasso	718
	Vallisnari, Lucca	636
	Calini, Brescia	626
	Rambaldi-Valeriani, Imola	560
	Corbino, Siracusa	559
	Monti, Chieri	541
	Galilei, Trento	530
	Cannizzaro, Roma	510
	Rummo, Benevento	476
	Parodi, Acqui Terme	456
	Landi, Velletri	431
	Malignani, Cervignano del Friuli	422
	Lucrezio Caro, Cittadella	410
	Alighieri, Gorizia	402
	Dini, Pisa	401
	Vian, Bracciano	395
	Russell, Guastalla	392
	Galilei, Macerata	347
	Einstein, Palermo	308
	Volta-Sansi-Leonardi, Spoleto	300
	Petrarca, Arezzo	287
	Trissino, Valdarno	285
	Castelnuovo, Firenze	279
	Romita, Campobasso	275
	Corridoni-Campana, Osimo	272
	Maria Ausiliatrice, Caltagirone	162
	Fazekas, Budapest	703
	Jacub Skodli, Prerov	631

Semifinale B - Stato squadre

01) Corbino	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Einstein	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	7	13	14	15	16
04) Lucrezio Caro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Newton	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Romita	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Rummo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Vian	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2	13	14	15	16
09) Alighieri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) Maria Ausiliatrice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Petrarca	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Rambaldi-Valeriani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) Vallisneri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Volta-Sansi-Leonardi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Castelnuovo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Corni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Corridoni-Campana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Trissino	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Marinelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) Monti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Landi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Parodi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Calini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Cannizzaro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2	13	14	15	16
27) Dini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Russell	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
29) Malignani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
30) Jacob Skoda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
31) Fazekas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Semifinale B - Classifica domande



Semifinale D - Classifica finale squadre

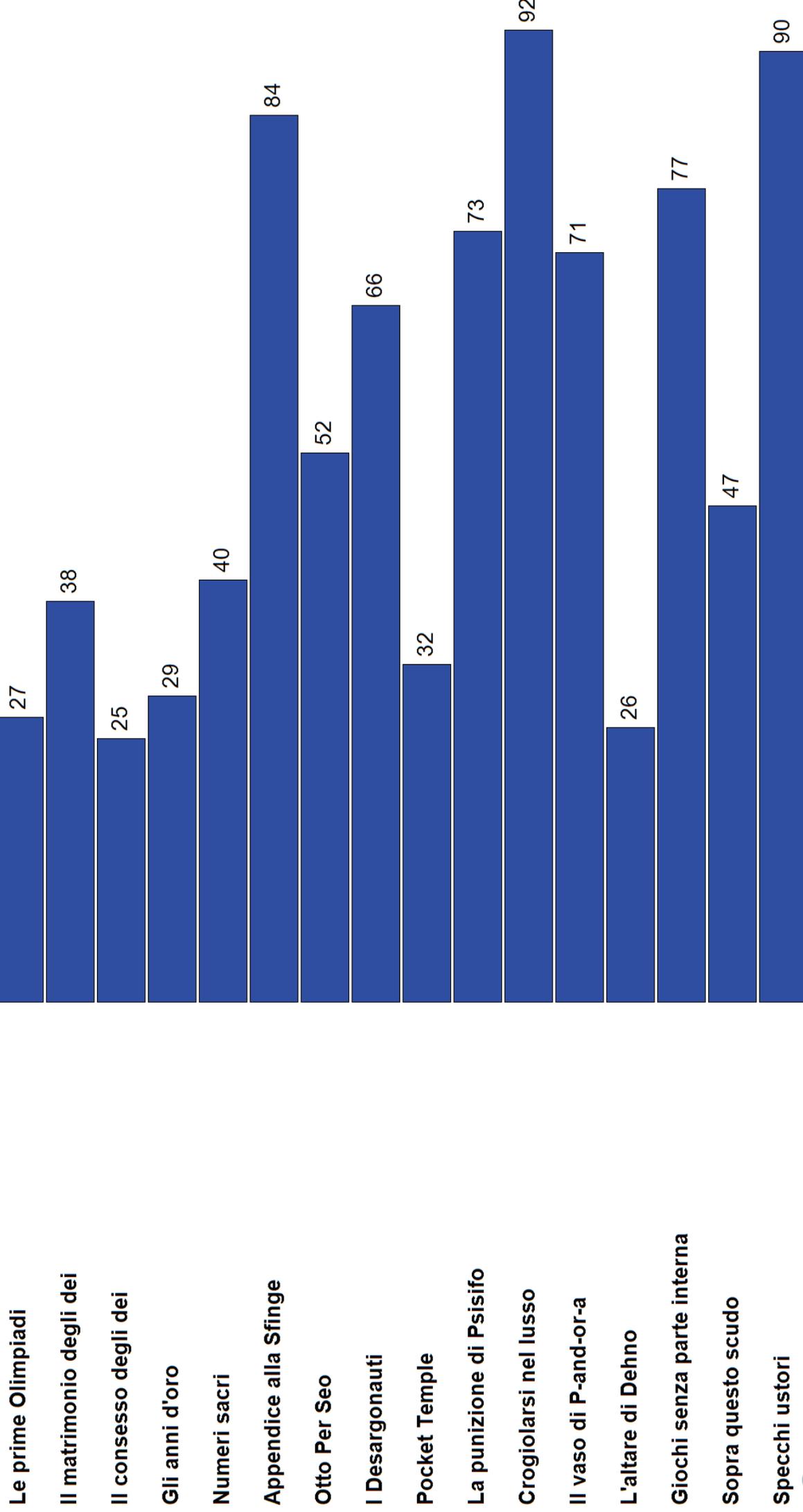
UU:UU

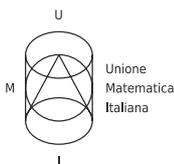
Leonardo, Brescia	891
Leonardo da Vinci, Treviso	868
Vercelli, Asti	849
Frisi Monza	696
Fermi, Cantù	690
Leopardi-Majorana, Pordenone	655
Spallanzani, Reggio Emilia	652
Cassini, Genova	646
Douhet, Firenze	641
Einstein, Teramo	613
Alessi, Perugia	597
Volta, Colle di Val d'Elsa	580
Amedeo di Savoia, Pistoia	544
Galilei, Alessandria	538
Levi, Montebelluna	530
488 Galilei, Verona	
463 Bertoni, Udine	
443 Gioia, Piacenza	
441 Fermi-Monticelli, Brindisi	
436 Pacinotti, Cagliari	
422 Banzi Bazoli, Lecce	
415 Berto, Mogliano Veneto	
383 Russell, Cles	
372 Quadri, Vicenza	
370 Ulivi, Parma	
346 Alfano da Termoli, Termoli	
329 Majorana, Latina	
307 Cavalieri, Verbania	
303 Severi, Salerno	

Semifinale D - Stato squadre

01) Bertoni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
02) Leonardo da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
03) Einstein	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
04) Severi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
05) Amedeo di Savoia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
06) Alessi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
07) Cassini	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
08) Fermi-Monticelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
09) Quadri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10) Spallanzani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
11) Banzi Bazoli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
12) Douhet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13) Pacinotti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
14) Leonardo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16) Alfano da Termoli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17) Volta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18) Russell	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19) Fermi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
21) Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22) Vercelli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
23) Leopardi-Majorana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24) Berto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25) Ulivi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
26) Frisi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
27) Levi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28) Cavalieri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
29) Gioia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Semifinale D - Classifica domande





Unione
Matematica
Italiana



XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale Nazionale – 10 Maggio 2014



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- **I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].**
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Rito propiziatorio

Prima di partire alla ricerca del padre Ellisseo, il giovane Teoremaco intende ingraziarsi la dea Mathena, per cui consulta un oracolo e ottiene come responso “Calcola il numero $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2014 \cdot 2015 \cdot 2016}$, riduci il risultato ottenuto ai minimi termini e scopri qual è il più grande fattore primo che divide il denominatore. Dovrai sacrificare altrettanti tori alla dea Mathena”. Di quanti tori sta parlando l'oracolo?

2. Una lunga tela

L'astuta Penelopell ha promesso che sposerà uno dei Proci solo dopo aver completato il sudario del suocero Laerdós, una lunga tela in parte dorata e in parte argentata. La sera in cui Teoremaco parte alla ricerca del padre, Penelopell ha già tessuto 7 cubiti di tela, in modo che la tela dorata sia il doppio di quella argentata. A partire dalla notte successiva alla partenza del phiglio Teoremaco, ogni notte Penelopell disfa tela dorata in quantità pari alla metà di quella argentata, quindi disfa tutta la tela argentata; ogni giorno Penelopell tesse una quantità di tela argentata pari alla metà della tela dorata che aveva alla fine del giorno precedente. Dopo che ha svolto questo processo per sessanta notti e sessanta giorni qual è il rapporto tra le quantità di tela argentata e tela dorata? *Si risponda fornendo le prime quattro cifre dopo la virgola del rapporto.*

3. [★] Sono Proci Questi Itôcesi!

Sebbene HOMero non lo dica, i Proci sono molto generosi nei confronti di Penelopell. Un giorno pensano di regalarle ognuno una collana fatta di 17 pietre perfettamente sferiche scelte tra smeraldi e rubini. Ovviamente vogliono evitare di regalare alla regina di Itôca due collane che opportunamente ruotate nello spazio risultino uguali. Quante collane diverse possono far confezionare i Proci? *Gli smeraldi sono tutti uguali tra loro e inseriti nella collana nello stesso modo, e così i rubini.*

4. [★] Trofeo di guerra

Su consiglio di Nashtore, Teoremaco si reca da Menelao in cerca di notizie sul padre Ellisseo. Alla corte di Menelao trova inciso su una grande pietra un numero di 2014 cifre e chiede al re di Micene di cosa si tratti. Menelao risponde “Rubai questa lapide durante il saccheggio di Treia. Il re Primo aveva inciso inizialmente un 1 sulla lapide, quindi aveva iniziato ad aggiungere ogni giorno alla sinistra dell'ultimo numero scritto la più piccola cifra decimale (diversa da zero) per cui il nuovo numero non avesse fattori primi minori di 10”. Quali sono le prime quattro cifre a sinistra incise sulla lapide?

5. [★] Un popolo di smemorati

Partiti da Treia, Ellisseo e i suoi compagni vengono spinti da una bufera nella terra dei Rotofagi, popolo di gente smemorata. Per tenere con precisione conto delle entrate giornalieri il re dei Rotofagi introduce su consiglio di Ellisseo un sistema a prova di amnesia. Vengono eletti 20 uomini, a ciascuno dei quali viene assegnato un ufficio. Ogni giorno all'impiegato del primo ufficio viene comunicato l'ammontare delle entrate giornalieri: egli deve annotare tale numero sul proprio registro. All'impiegato dell'ufficio k , per $2 \leq k \leq 20$, viene poi richiesto di annotare ogni giorno sul proprio registro la somma di tutti i numeri annotati dall'impiegato dell'ufficio $k - 1$ fino al giorno precedente

(il primo giorno annotano tutti 0, non avendo alcun numero da sommare). Curiosamente, i numeri che vengono comunicati al primo impiegato sono proprio i quadrati perfetti: 1 il primo giorno, 4 il secondo giorno, 9 il terzo, e così via. L'impiegato del ventesimo ufficio, annoiato dal compito assegnatogli, cerca dapprima di fattorizzare 9973 scoprendo che è un primo, quindi si chiede in quale giorno, per la prima volta, scriverà un numero positivo multiplo di 9973. Qual è la risposta alla sua domanda?

6. Quante pecore!

Ellisseo e i suoi compagni giungono nella grotta di Polinomio e scoprono ben presto che il ciclope possiede una gran quantità di pecore. Dividendo le pecore in gruppi da 5, ne avanzano 3, mentre dividendole in gruppi da 7 ne rimangono 2; infine dividendo le pecore in gruppi da 11, ne avanzano 7. Sapendo che ogni pecora ha 11 agnelli e che tutti gli agnelli sono meno di 5000, quanti sono gli agnelli?

7. [★] Un'arma improvvisata

Per accecare il ciclope Polinomio e fuggire dalla sua grotta, in cui sono imprigionati, Ellisseo e i suoi compagni hanno preso un tronco di ulivo e lo hanno opportunamente tagliato per appuntirlo. Inizialmente il tronco aveva la forma di un prisma con un ottagono regolare $ABCDEFGH$ come base; successivamente il prisma è stato tagliato lungo un piano, ottenendo così una sezione $A'B'C'D'E'F'G'H'$, ove si intende che A e A' giacciono sullo stesso spigolo laterale del prisma, così come B e B' e analogamente per le altre coppie di punti. Sappiamo che $AA' = 3125$ cm, $BB' = 3228$ cm, $DD' = 3728$ cm. Quanto vale FF' , in cm?

8. L'otre dei 20

Eolero, il dio dei 20, decide di fare un dono a Ellisseo: un otre contenente tutti i venti sfavorevoli che gli consentirà una serena navigazione verso Itôca a patto che rimanga sempre chiuso. L'otre è dotato di una combinazione a tre cifre decimali e si apre solo se una delle tre cifre è 3 e le altre due sono 0. Spinti dalla curiosità, una notte i compagni di Ellisseo decidono di provare ad aprirlo. A turno lanciano una dracma: se esce testa sottraggono 1 a una delle tre cifre (scelta casualmente tra quelle maggiori di 0, ognuna con la stessa probabilità), mentre se esce croce sottraggono 1 a una delle tre cifre (scelta a caso tra quelle maggiori di 0, ognuna con la stessa probabilità) e contemporaneamente aggiungono 1 a una delle altre 2 (scelta a caso, ognuna con la stessa probabilità). Sapendo che la combinazione letta inizialmente sull'otre è 1-2-1, qual è la probabilità che riescano ad aprire l'otre esattamente dopo il secondo lancio di moneta? Fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

9. Nella terra dei Lestrigoni

Ellisseo e i suoi compagni giungono nella terra dei Lestrigoni. Questi famelici giganti cannibali distruggono undici delle dodici navi, e sono disposti a lasciar partire l'ultima solo se i nostri eroi daranno prova della loro abilità nell'arte più in voga nel paese, la lestrigonometria: dato un triangolo ABC con $AB = 10$, $AC = BC = 20$, e detta DE la corda della circonferenza circoscritta ad ABC che è parallela ad AB , lunga quanto AC e più vicina possibile a C , viene chiesto loro quanto valga il quadrato della lunghezza della corda CD . Quale risposta dovranno dare i nostri eroi per sfuggire alle fauci dei Lestrigoni?

10. La radice del problema

Mentre Ellisseo si sta recando da Circeva il dio KERMES lo raggiunge per salvarlo dal tranello della maga, che ha trasformato i suoi compagni in complicatissime equazioni differenziali stocastiche. KERMES consiglia al nostro eroe di preparare una pozione magica usando alcune radici: Ellisseo deve calcolare la quantità $(a+b)(b+c)(c+a)$, ove a, b, c sono le radici del polinomio $x^3 - 26x^2 + 203x - 541$. Quale numero deve calcolare Ellisseo?

11. La profezia di Teoresia

Sceso nell'Ade, Ellisseo incontra l'anima di Teoresia, che gli rivela che prima che il nostro eroe possa tornare a casa dovranno passare ancora tanti mesi quante sono le coppie ordinate di numeri interi (a, b) tali che $|a+2b| + |a-b| = 2121$. Quanti mesi dovrà ancora peregrinare Ellisseo?

12. [★] Un canto(r) ammaliante

Il prode Ellisseo ha sentito narrare che le Seriene nel loro dolce canto(r) rivelano quali siano tutti i numeri positivi il cui quadrato è esprimibile come $n^4 + 3n^3 + n^2 + 2n + 13$ per un qualche n intero. Spinto dalla curiosità, Ellisseo si fa legare all'albero della nave per ascoltarle. Quanto vale la somma dei numeri rivelati dalle Seriene?

13. [★] Due orribili mostri

I nostri eroi stanno per raggiungere la zona infestata dai terribili mostri Cauchylla e Schwarziddi, che è delimitata da una circonferenza di raggio 40 stadi al centro della quale si trova Schwarziddi. La nave di Ellisseo non è ancora entrata nel cerchio, e si trova in un punto P tale che, tracciate le due tangenti da P alla circonferenza e detti A e B i due punti di tangenza, l'angolo \widehat{BPA} misura 120° . Cauchylla si trova in un punto C sulla circonferenza tale che BC sia

parallela ad AP . Ellisseo sa che solo un'accorta navigazione consentirà alla sua nave di oltrepassare i due mostri, e ha bisogno di conoscere esattamente l'area del triangolo che ha per vertici Schwarzididi e i centri delle circonferenze inscritte nei triangoli ABP e ABC . Quanto vale tale area, espressa in stadi quadri?

14. Un fatale sacrilegio

I nostri eroi sono giunti in Sicilia. Dopo aver mangiato alcune delle vacche sacre al Sole Iperbolione, i compagni di Ellisseo per passare il tempo calcolano le tre radici reali a_1, b_1, c_1 del polinomio $t^3 - 18t^2 + 15t + 1$ e le tre radici reali a_2, b_2, c_2 del polinomio $t^3 - 18t^2 + 15t + 683$, e le rivelano al loro comandante. Ellisseo risponde "Non vi siete accorti che le quantità $a_2 - a_1^{-1}, b_2 - b_1^{-1}, c_2 - c_1^{-1}$ sono tutte uguali a un certo intero positivo z ? È senz'altro un cattivo presagio: avete mangiato le vacche sacre al Sole e sarete puniti". Qual è questo nefasto numero z ?

15. [★] L'ira di Poset-one

Il dio Poset-one è adirato con Ellisseo per l'accecamento del figlio Polinomio e prepara una degna vendetta. Poset-one non sa dove si trovi esattamente la zattera di Ellisseo, ma solo che sta navigando all'interno di un'area a forma di ettagono regolare. Allora, per quattro volte successive, traccia una diagonale dell'ettagono scelta casualmente (ognuna con la stessa probabilità) tra tutte quelle che non intersecano alcuna di quelle già tracciate. In questo modo divide l'ettagono in cinque triangoli, e scatena in ognuno di essi una tremenda tempesta triangolare. Qual è la probabilità che tutte le diagonali scelte partano da uno stesso vertice? Fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

16. Prigioniero della ninfa

Ellisseo è naufragato ad Ogigia, dove viene ospitato dalla ninfa Calipschitz, che era ancora giovane e bellissima, molto tempo prima di incontrare i π -rati. Costei, innamoratasi di lui, gli fa questa proposta: "Rimani con me e ti rivelerò quanto vale $\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + \dots + \lfloor \log_2 (2^{9973}) \rfloor$ ". Questo numero è conosciuto con esattezza solo dagli immortali!". L'astuto Ellisseo nota subito che 9973 è primo, per cui le risponde "Preferisco rimanere un uomo mortale, e accontentarmi di sapere quanto vale il resto della divisione della quantità che mi prometti per 9973". Quanto vale questo resto? Il simbolo $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x , cioè il più grande numero intero n tale che $n \leq x$.

17. Come se la tirano le ancelle

Gaussicaa, la figlia di Artinoo, re dei Feaci, sta giocando a palla con le sue 10 ancelle. All'inizio Gaussicaa ha la palla in mano. Ogni volta che Gaussicaa ha la palla in mano sceglie un'ancella a caso (con la stessa probabilità tra tutte) e le passa la palla; ogni volta che un'ancella ha la palla in mano la passa con $1/2$ di probabilità a Gaussicaa e con $1/18$ di probabilità a ognuna delle altre ancelle. Dopo dieci passaggi ben riusciti però la palla viene lanciata un'altra volta e rotola via verso Ellisseo, svenuto a terra dopo il naufragio sulle coste di Schemia. Qual è la probabilità che sia stata proprio Gaussicaa a sbagliare l'ultimo lancio? Fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

18. [★] Vecchi ricordi

Alla corte del re Artinoo il cantor-e Demodulo rievoca l'episodio del cavallo di Treia: "Il numero di soldati nascosti nel cavallo aveva quattro cifre, e aggiungendo una cifra 1 alla sua sinistra si otteneva il prodotto di due primi distinti". Ellisseo si commuove al ricordo ed esclama: "Aggiungendo invece una cifra 2 alla sinistra del numero si otteneva un quadrato perfetto. Ricordo bene che avevamo scelto con cura il numero di soldati da nascondere, il più grande con tutte queste proprietà". Tutti rimangono sbalorditi. Quanti soldati erano nascosti nel cavallo, stando a queste testimonianze?

19. Nostalgia di un cane

Mentre aspetta il ritorno del padrone Ellisseo, il vecchio cane Desargo intraprende ogni giorno una malinconica passeggiata per il cortile della reggia, che ha la forma di una corona circolare. Desargo parte dalla sua cuccia, situata sulla circonferenza esterna, e si muove all'interno del cortile lungo segmenti appartenenti a rette la cui distanza dal centro del cortile è sempre la stessa, cambiando direzione solo quando, alternativamente, raggiunge un punto della circonferenza interna o uno di quella esterna. All'inizio la traiettoria di Desargo forma un angolo di 63° con la tangente alla circonferenza esterna nel punto di partenza. Invece l'angolo tra la traiettoria e la tangente alla circonferenza interna nel primo punto in cui Desargo raggiunge la circonferenza interna misura 34° . Quando Desargo ripassa per la seconda volta in un punto in cui è già passato, interrompe la sua passeggiata e ripensa con nostalgia al suo padrone. Quanti cambi di direzione effettua al massimo Desargo in una sua passeggiata?

20. Magnanimità di Ellisseo

Ellisseo è giunto, travestito da mendicante, nella capanna del vecchio UMleio, guardiano dei porci e servo fedele. Questi gli confida: "Straniero, come vorrei che tornasse il nostro re Ellisseo! Era tanto magnanimo che prima di partire per la guerra mi lasciò, come stipendio per badare ai suoi animali, un numero a quattro cifre di dracme, che

moltiplicato per 10 diveniva un quadrato e moltiplicato per 20 diveniva un cubo”. Quante dracme aveva dato Ellisseo ad UMleio?

21. Servi fedeli e traditori

Ellisseo è tornato alla reggia nelle sembianze di un mendicante e vuole capire quali dei suoi 2014 servi gli siano ancora fedeli. Sa con certezza che i servi fedeli gli diranno la verità, mentre i traditori mentiranno. I servi sono seduti a un tavolo circolare e ognuno di loro sostiene che le prime diciotto persone alla sua destra sono dei traditori. Quanti sono al minimo i servi rimasti fedeli?

22. [★] La prova dell'arco

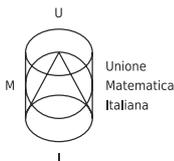
Dopo che i Proci hanno fallito nella prova dell'arco, anche Ellisseo si fa avanti per tentare l'impresa. Il nostro eroe si ricorda il complicato procedimento necessario per (sot)tendere l'arco: il passaggio cruciale consiste nel calcolare $\frac{a_{2014} \cdot a_{2013} \cdot a_{2012}}{a_{2006} \cdot a_{2005} \cdot a_{2004}}$, dove $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, e per $n \geq 3$ il numero a_n è il più piccolo intero maggiore di a_{n-1} che sia multiplo di $\text{MCD}(a_i, a_j)$ per ogni coppia (i, j) con $1 \leq i < j < n$. Qual è questo numero?

23. Scetticismo di una moglie

Nonostante la prova dell'arco e l'eroismo mostrato nella strage dei Proci, Penelopell non si fida ancora dello straniero, per cui per metterlo alla prova dice: “Il nostro letto nuziale era fatto con il legno ancora tenero di giovani alberi, comprati nelle foreste dell'Akea”; Ellisseo replica prontamente “Non è vero, ricordo benissimo che l'albero con cui lo fabbricai aveva tanti anni quanto il più piccolo numero esprimibile come somma di tre interi positivi distinti tali che, comunque presi due di essi, la loro somma è un cubo perfetto”. Con questa rivelazione svanisce l'ultima ombra di dubbio sull'identità del nostro eroe, ed Ellisseo può finalmente riabbracciare la sua Karamata Penelopell. Quanti anni aveva l'albero con cui Ellisseo costruì il letto?

24. La pace restaurata

I parenti dei Proci intendono vendicare la morte dei loro cari e si dirigono compatti verso la casa di Laerdōs, in cui si trova anche Ellisseo in visita al vecchio padre. Accortosi di ciò Zeus interviene per sventare la carneficina: “Non consentirò alcuna vendetta per la morte dei Proci, gente viziata che non avrebbe saputo nemmeno calcolare $f(1) + f(2) + \dots + f(2014)$ ”. Nello stupore generale Ellisseo chiede al padre di quale funzione f stia parlando Zeus, e Laerdōs gli risponde che si tratta della sacra funzione che associa a ogni intero positivo n il prodotto delle sue cifre dispari, con la regola che $f(n) = 0$ se n non contiene cifre dispari. A quale quantità allude Zeus?



Unione
Matematica
Italiana



XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Finale Nazionale – Soluzioni – 10
Maggio 2014



ZANICHELLI

Nr.	Problema	Soluzione
1	Rito propiziatorio	0031
2	Una lunga tela	9838
3	[*]Sono Proci Questi Itôcesi!	4112
4	[*]Trofeo di guerra	3212
5	[*]Un popolo di smemorati	4996
6	Quante pecore!	1408
7	[*]Un'arma improvvisata	3729
8	L'otre dei 20	0013
9	Nella terra dei Lestrigoni	0160
10	La radice del problema	4737
11	La profezia di Teoresia	5656
12	[*]Un cantor ammaliante	0318
13	[*]Due orribili mostri	0292
14	Un fatale sacrilegio	0011
15	[*]L'ira di Poset-one	0211
16	Prigioniero della ninfa	9971
17	Come se la tirano le ancelle	0683
18	[*]Vecchi ricordi	9241
19	Nostalgia di un cane	0013
20	Magnanimità di Ellisseo	6250
21	Servi fedeli e traditori	0106
22	[*]La prova dell'arco	8832
23	Scetticismo di una moglie	0792
24	La pace restaurata	3907

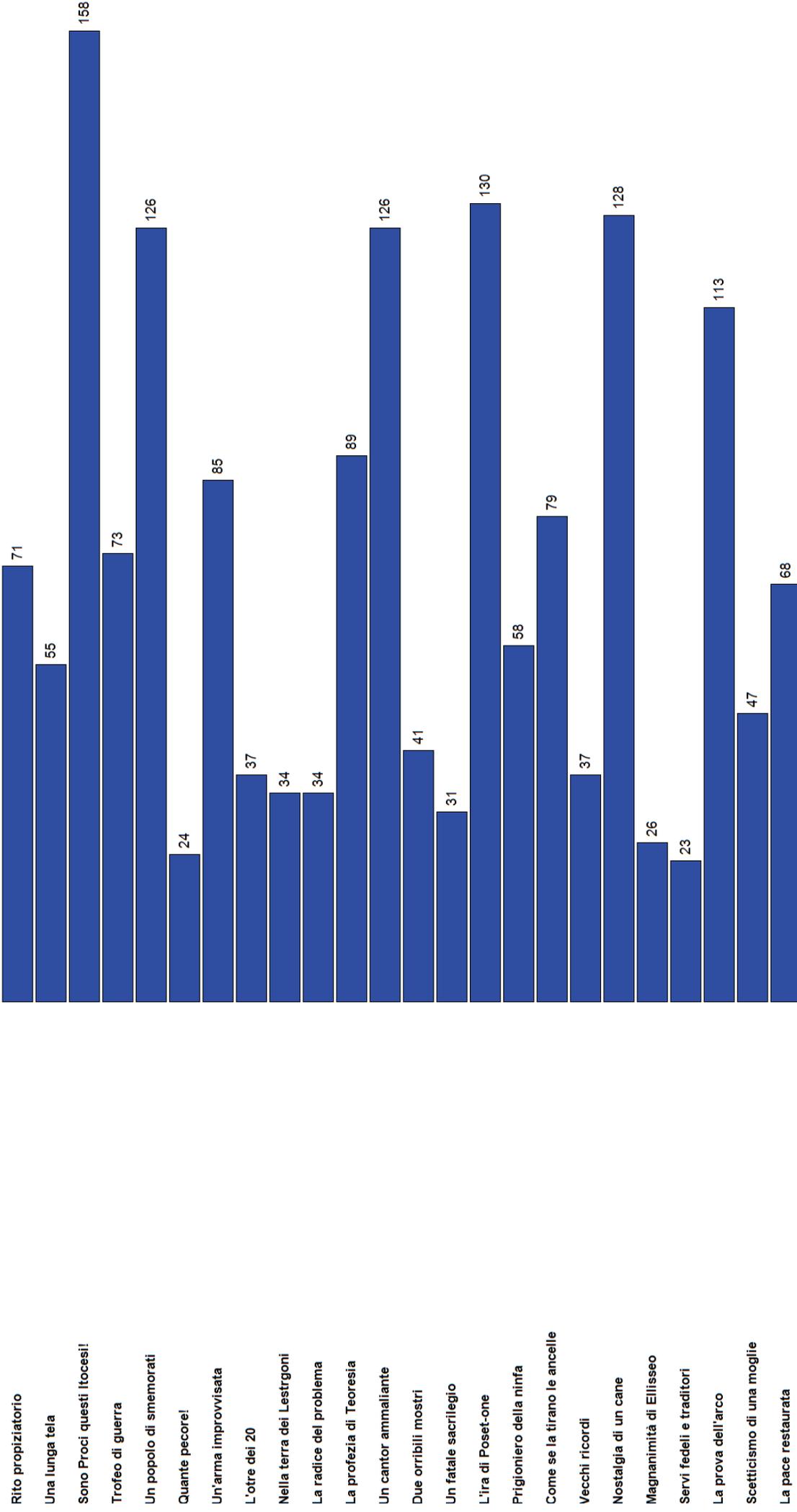
Finale Nazionale - Classifica finale squadre

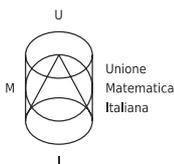
Marconi, Carrara	1028
Marconi, Conegliano	982
Cassini, Genova	931
Leonardo da Vinci, Treviso	876
Ferraris, Torino	763
Golgi, Breno	755
Frisi, Monza	753
Leonardo, Brescia	747
Einstein, Teramo	726
Corni, Modena	724
Newton, Chivasso	645
Mascheroni, Bergamo	645
Monti, Chieri	639
Jacopo da Ponte, Bassano del Grappa	621
Volta, Colle di Val d'Elsa	612
Galilei, Trento	605
Douhet, Firenze	601
Alessi, Perugia	587
Moro, Reggio Emilia	579
Calini, Brescia	574
Majorana, Brindisi	572
Copernico, Udine	554
Stampacchia, Tricase	521
Corbino, Siracusa	483
Spallanzani, Reggio Emilia	454
Vercelli, Asti	450
Fermi, Cantù	448
Vallisneri, Lucca	430
Leopardi-Majorana, Pordenone	417
Pacinotti, La Spezia	413
Grassi, Leggo	413
Martinelli, Udine	395
Cattaneo, Torino	366
Gandhi, Narni	366
Copernico, Torino	338
Righi, Roma	335
Paschini, Tolmezzo	319
Rambaldi-Valleriani, Imola	275
Leonardo Da Vinci, Firenze	273

Finale Nazionale - Stato squadre

01) Copernico	1	2	3	4	2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
02) Golgi	1	2	3	4	1	5	6	7	18	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
03) Leonardo	1	2	3	1	5	6	7	3	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
04) Marconi	1	1	2	3	2	4	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	24
05) Leonardo da Vinci	1	2	3	2	4	5	6	7	28	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
06) Vercelli	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
07) Cattaneo	1	1	2	3	7	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	24
08) Jacopo da Ponte	1	2	3	4	5	6	7	8	29	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
09) Marinelli	1	2	13	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
10) Corni	1	1	2	13	1	4	2	5	6	7	8	9	10	2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	24
11) Pacinotti	1	2	13	2	4	1	5	6	7	8	29	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	24
12) Copernico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
13) Moro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	5	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
14) Stampacchia	1	2	23	1	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
15) Majorana	1	2	3	2	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
16) Newton	1	2	13	2	4	5	6	7	8	9	10	11	1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24
17) Grassi	1	2	13	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
18) Paschini	1	2	13	1	4	5	6	7	8	9	10	11	2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24
19) Marconi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
20) Ferraris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
21) Frisi	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
22) Fermi	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
23) Righi	1	2	13	2	4	2	5	6	7	8	4	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	24
24) Copernico	1	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25) Leopardi-Majorana	1	2	13	4	5	6	7	8	9	19	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
26) Gandhi	1	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
27) Spallanzani	1	2	3	3	4	5	6	7	28	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
28) Cassini	1	2	3	4	1	5	6	7	18	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
29) Douhet	1	2	13	1	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
30) Vallisneri	1	2	3	3	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
31) Leonardo Da Vinci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
32) Calini	1	1	2	3	4	5	6	7	8	4	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24
33) Einstein	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
34) Mascheroni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
35) Alessi	1	1	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10	11	1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	24
36) Volta	1	2	13	4	5	6	7	8	29	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
37) Rambaldi-Valleriani	1	2	23	4	5	6	7	8	39	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
38) Corbino	1	1	2	13	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
39) Monti	1	1	2	3	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	24
40) Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
41) Fazekas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	4	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
42) Skoda	1	2	3	4	1	5	6	7	8	19	10	11	1	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	1

Finale Nazionale - Classifica domande





XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – 10 Maggio 2014



ZANICHELLI

Istruzioni Generali

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.
- **I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].**
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Una lunga tela

[20]

L'astuta Penelopell ha promesso che sposerà uno dei Proci solo dopo aver completato il sudario del suocero Laerdós, una lunga tela in parte dorata e in parte argentata. La sera in cui Teoremaco parte alla ricerca del padre, Penelopell ha già tessuto 35 cubiti di tela, in modo che la tela dorata sia il doppio di quella argentata. A partire dalla notte successiva alla partenza del phiglio Teoremaco, ogni notte Penelopell disfa tela dorata in quantità pari alla metà di quella argentata, quindi disfa tutta la tela argentata; ogni giorno Penelopell tesse una quantità di tela argentata pari alla metà della tela dorata che aveva alla fine del giorno precedente. Dopo che ha svolto questo processo per 2014 notti e 2014 giorni qual è il rapporto tra le quantità di tela argentata e tela dorata? *Si risponda fornendo la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

2. Sono Proci Questi Itôcesi!

[45]

Sebbene HOMero non lo dica, i Proci sono molto generosi nei confronti di Penelopell. Un giorno pensano di regalarle ognuno una collana fatta di 15 pietre perfettamente sferiche scelte tra smeraldi e rubini. Ovviamente vogliono evitare di regalare alla regina di Itôca due collane che opportunamente ruotate nello spazio risultino uguali. Quante collane diverse possono far confezionare i Proci? *Gli smeraldi sono tutti uguali tra loro e inseriti nella collana nello stesso modo, e così i rubini.*

3. Quante pecore!

[25]

Ellisseo e i suoi compagni giungono nella grotta di Polinomio e scoprono ben presto che il ciclope possiede una gran quantità di pecore. Dividendo le pecore in gruppi da 5, ne avanzano 2, mentre dividendole in gruppi da 7 ne avanza una; infine dividendo le pecore in gruppi da 11, ne avanzano 6. Sapendo che ogni pecora ha 11 agnelli e che tutti gli agnelli sono meno di 5000, quanti sono gli agnelli?

4. Un'arma improvvisata

[40]

Per accecare il ciclope Polinomio e fuggire dalla sua grotta, in cui sono imprigionati, Ellisseo e i suoi compagni hanno preso un tronco di ulivo e lo hanno opportunamente tagliato per appuntirlo. Inizialmente il tronco aveva la forma di un prisma con un ottagono regolare $ABCDEFGH$ come base; successivamente il prisma è stato tagliato lungo un piano, ottenendo così una sezione $A'B'C'D'E'F'G'H'$, ove si intende che A e A' giacciono sullo stesso spigolo laterale del prisma, così come B e B' e analogamente per le altre coppie di punti. Sappiamo che $AA' = 2345$ cm, $BB' = 3228$ cm, $DD' = 3728$ cm. Quanto vale FF' , in cm?

5. Nella terra dei Lestrigoni

[30]

Ellisseo e i suoi compagni giungono nella terra dei Lestrigoni. Questi famelici giganti cannibali distruggono undici delle dodici navi, e sono disposti a lasciar partire l'ultima solo se i nostri eroi daranno prova della loro abilità nell'arte più in voga nel paese, la lestrigonometria: dato un triangolo ABC con $AB = 20$, $AC = BC = 40$, e detta DE la corda della circonferenza circoscritta ad ABC che è parallela ad AB , lunga quanto AC e più vicina possibile a C , viene chiesto loro quanto valga il quadrato della lunghezza della corda CD . Quale risposta dovranno dare i nostri eroi per sfuggire alle fauci dei Lestrigoni?

6. L'otre dei 20**[35]**

Eolero, il dio dei 20, decide di fare un dono a Ellisseo: un otre contenente tutti i venti sfavorevoli che gli consentirà una serena navigazione verso Itôca a patto che rimanga sempre chiuso. L'otre è dotato di una chiusura a combinazione a tre cifre decimali e si apre solo se la combinazione è 300. Spinti dalla curiosità, una notte i compagni di Ellisseo decidono di provare ad aprirlo. A turno lanciano una dracma: se esce testa sottraggono 1 a una delle tre cifre (scelta con probabilità uniforme tra quelle maggiori di 0), mentre se esce croce sottraggono 1 a una delle tre cifre (scelta con probabilità uniforme tra quelle maggiori di 0) e aggiungono 1 a una delle altre 2 (scelta con probabilità uniforme). Sapendo che la combinazione letta inizialmente sull'otre è 121, qual è la probabilità che riescano ad aprire l'otre esattamente dopo il terzo lancio di moneta? *Fornire la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

7. La radice del problema**[30]**

Il dio Kermes raggiunge Ellisseo per salvarlo dal tranello della maga Circeva, che ha trasformato i suoi compagni in complicatissime equazioni differenziali stocastiche. Kermes consiglia al nostro eroe di preparare una pozione magica usando alcune radici: Ellisseo deve calcolare la quantità $(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)$, ove a, b, c, d sono le radici del polinomio $x^4 - 2x^3 - 61x^2 + 62x + 840$. Quale numero deve calcolare Ellisseo?

8. Un canto(r) ammaliante**[40]**

Il prode Ellisseo ha sentito narrare che le Seriene elencano nel loro dolce canto(r) tutti i polinomi $p(x)$ non nulli a coefficienti interi, di grado minore o uguale a 2014 e tali che $p(x)^2 - 2 = p(x^2 - 2)$. Spinto dalla curiosità, Ellisseo si fa legare all'albero maestro della nave per ascoltarle. Quanti polinomi gli riveleranno le Seriene?

9. Due orribili mostri**[50]**

I nostri eroi stanno per raggiungere la zona infestata dai terribili mostri Cauchylla e Schwarziddi; Ellisseo, abile nocchiero, studia le carte nautiche per cercare di evitarli. La zona in cui è possibile incontrare Cauchylla è un triangolo di lati 42, 70 e $14\sqrt{19}$, mentre quella in cui si trova Schwarziddi è un secondo triangolo, equilatero e "inscritto" nel primo (nel senso che ha un vertice su ogni suo lato, o sui rispettivi prolungamenti). Quanto può valere al minimo il lato di quest'ultimo triangolo?

10. Prigioniero della ninfa**[30]**

Ellisseo è naufragato ad Ogigia, dove viene ospitato dalla ninfa Calipschitz, ancora giovane e bellissima, molto tempo prima che ella incontrasse i π -rati. Durante i lunghi anni trascorsi insieme, giocano al seguente gioco. Innanzitutto scrivono lungo una circonferenza una sequenza di 2014 cifre decimali, quindi pongono una conchiglia su una delle cifre. A partire da Ellisseo, i due si alternano nelle seguenti mosse: Ellisseo cancella la cifra su cui si trova la conchiglia e la ricopia su una tavoletta di argilla, a destra delle cifre già copiate, quindi sposta la conchiglia in senso orario sulla prima cifra disponibile; Calipschitz invece sposta la conchiglia in senso orario di una posizione senza cancellare o ricopiare nulla. Dopo 2014 mosse di Ellisseo la circonferenza è ormai vuota e sulla tavoletta è incisa, con grande stupore dei due giocatori, la stringa 201420142014...20. Quali erano all'inizio del gioco le prime quattro cifre in senso orario sulla circonferenza, a partire da quella inizialmente coperta dalla conchiglia (inclusa)?

11. Servi fedeli e traditori**[15]**

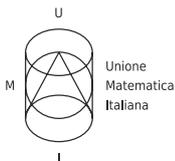
Ellisseo è tornato nella sua reggia nelle sembianze di un mendicante e vuole capire quali dei suoi 2014 servi gli siano ancora fedeli. Sa con certezza che i servi fedeli gli diranno la verità, mentre i traditori mentiranno. I servi sono seduti a un tavolo circolare e ognuno di loro sostiene che le prime cinquantadue persone alla sua destra sono dei traditori. Quanti sono al minimo i servi rimasti fedeli?

12. La prova dell'arco**[40]**

Dopo che i Proci hanno fallito nella prova dell'arco, anche Ellisseo si fa avanti per tentare l'impresa. Il nostro eroe si ricorda il complicato procedimento necessario per (sot)tendere l'arco: il passaggio cruciale consiste nel calcolare $\frac{a_{2014} \cdot a_{2013} \cdot a_{2012}}{a_{2007} \cdot a_{2006} \cdot a_{2005}}$, dove $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, e per $n \geq 3$ il numero a_n è il più piccolo intero maggiore di a_{n-1} che sia multiplo di $\text{MCD}(a_i, a_j)$ per ogni coppia (i, j) con $1 \leq i < j < n$. Qual è questo numero?

13. Scetticismo di una moglie**[40]**

Nonostante la prova dell'arco e l'eroismo mostrato nella strage dei Proci, Penelopell non si fida ancora dello straniero, per cui per metterlo alla prova dice: "Il nostro letto nuziale era fatto con il legno ancora tenero di giovani alberi, comprati nelle foreste dell'Akea"; Ellisseo replica prontamente "Non è vero, ricordo benissimo che l'albero con cui lo fabbricai aveva tanti anni quanto il più piccolo numero esprimibile come somma di quattro interi positivi distinti tali che, comunque presi tre di essi, la loro somma è un cubo perfetto". Con questa rivelazione svanisce l'ultima ombra di dubbio sull'identità del nostro eroe, ed Ellisseo può finalmente riabbracciare la sua Karamata Penelopell. Quanti anni aveva l'albero con cui Ellisseo costruì il letto?



Unione
Matematica
Italiana



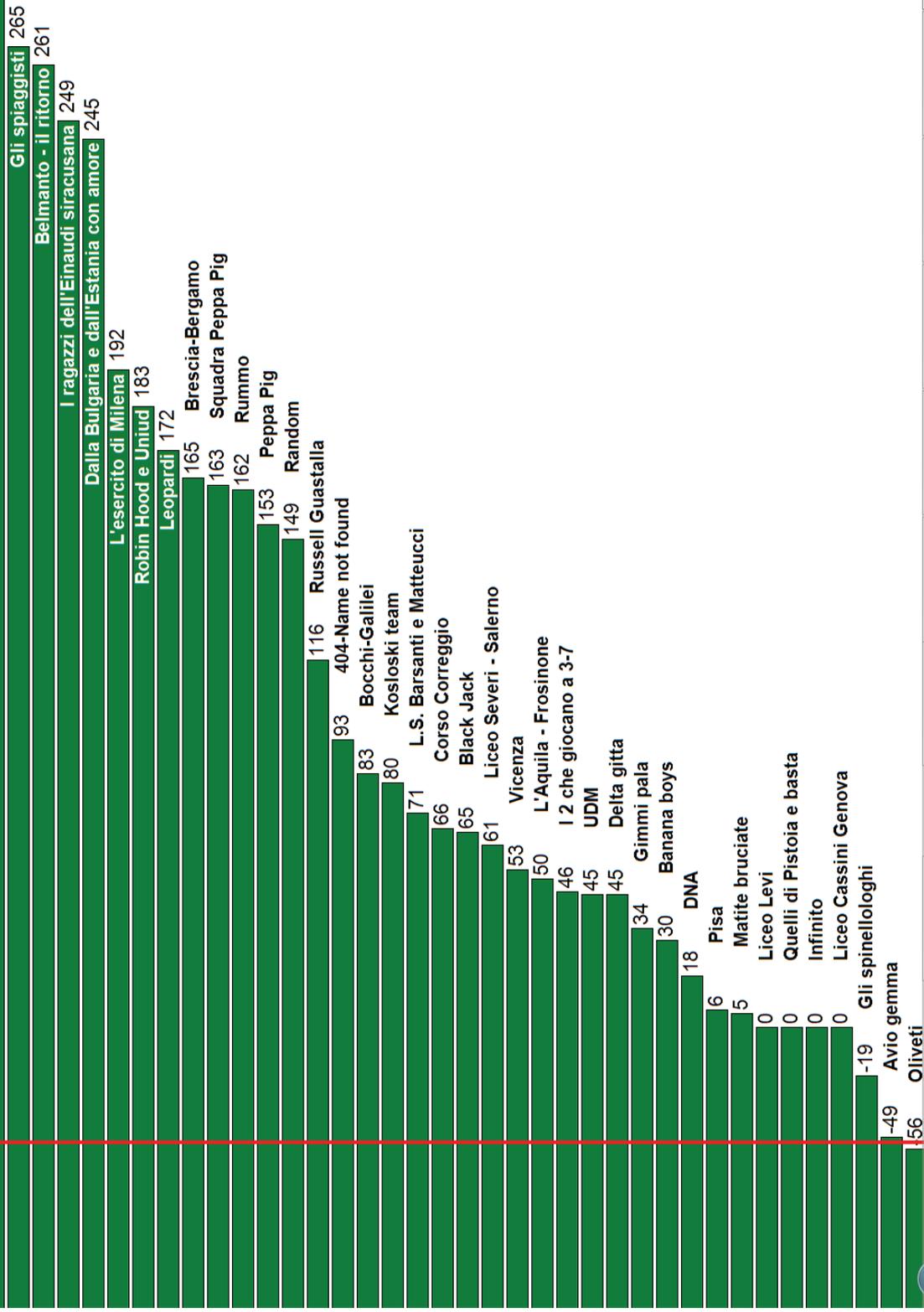
XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Gara del pubblico – Soluzioni – 10
Maggio 2014



ZANICHELLI

Nr.	Problema	Punti	Soluzione
1	Una lunga tela	20	4031
2	Sono Proci Questi Itôcesi!	45	1224
3	Quante pecore!	25	1397
4	Un'arma improvvisata	40	2169
5	Nella terra dei Lestrigoni	30	0640
6	L'otre dei 20	35	0391
7	La radice del problema	30	0720
8	Un cantor ammaliante	40	2016
9	Due orribili mostri	50	0025
10	Prigioniero della ninfa	30	2401
11	Servi fedeli e traditori	15	0038
12	La prova dell'arco	40	1472
13	Scetticismo di una moglie	40	6072



Gara del Pubblico - Stato squadre

01) UDM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
02) I ragazzi dell'Einaudi siracusana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
03) Banana boys	1	2	3	4	5	6	17	8	19	10	11	12	13
04) Gli spinellologi	1	2	3	4	5	6	27	8	9	10	11	12	13
05) DNA	1	2	3	4	5	6	27	8	49	10	11	12	13
06) Avio gemma	1	2	3	4	5	6	7	18	9	10	11	12	13
07) Delta gitta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
08) Kosloski team	1	2	3	4	5	6	17	13	9	10	11	12	13
09) Belmanto - il ritorno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10) Robin Hood e Uniud	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13
11) Infinito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12) Gli spiaggisti	1	2	3	4	5	6	17	8	9	10	11	12	13
13) Matite bruciate	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14) L.S. Barsanti e Matteucci	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
15) Gimmi pala	1	2	3	4	5	6	17	8	9	10	11	12	13
16) L'esercito di Milena	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17) Liceo Levi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
18) Quelli di Pistoia e basta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
19) Bocchi-Galilei	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
20) Dalla Bulgaria e dall'Estania con a	1	2	3	4	5	6	27	8	19	10	11	12	13
21) Russell Guastalla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
22) Vicenza	1	2	3	4	5	6	37	8	9	10	11	12	13
23) Leopardi	1	2	3	4	5	6	37	8	9	10	11	12	13
24) Brescia-Bergamo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
25) 404-Name not found	1	2	3	4	5	6	7	8	19	10	11	12	13
26) Liceo Severi - Salerno	1	2	3	4	5	6	37	8	9	10	11	12	13
27) Peppa Pig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
28) I 2 che giocano a 3-7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
29) Liceo Cassini Genova	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
30) Oliveti	1	2	3	4	5	6	67	8	19	10	11	12	13
31) Squadra Peppa Pig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
32) I sopravvissuti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
33) L'Aquila - Frosinone	1	2	3	4	5	6	37	13	9	10	11	12	13
34) Black Jack	1	2	3	4	5	6	17	8	9	10	11	12	13
35) Pisa	1	2	3	4	5	6	17	8	19	10	11	12	13
36) Rummo	1	2	3	4	5	6	17	8	9	10	11	12	13
37) Random	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
38) Corso Correggio	1	2	3	4	5	6	17	8	9	10	11	12	13

blueStone

Una lunga tela

Sono Proci QUESTI Itocesi!

Quante pecore!

Un'arma improvvisata

Nella terra dei Lestrigioni

L'otre dei 20

La radice del problema

Un cantor ammaliante

Due orribili mostri

Prigioniero della ninfa

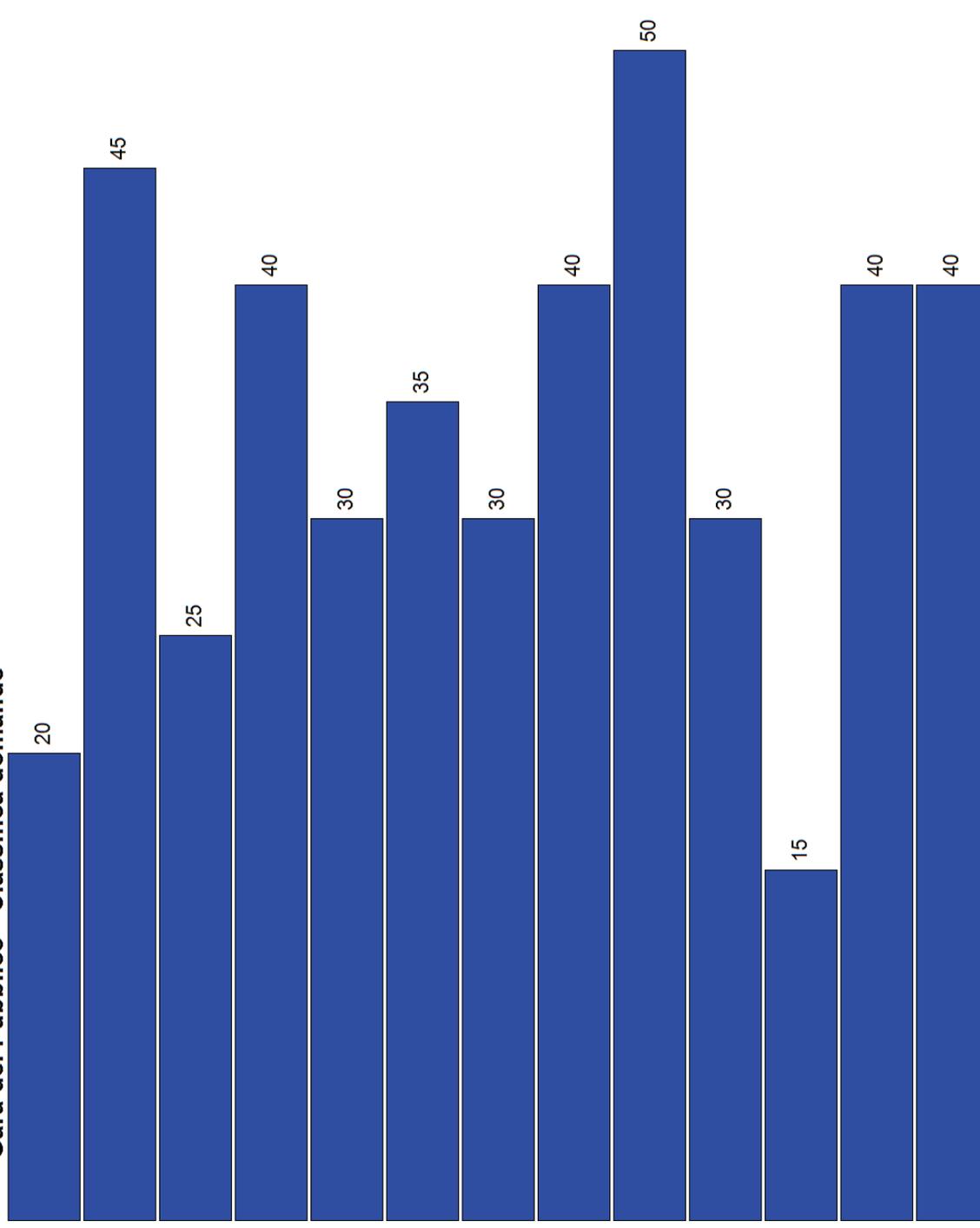
Servi fedeli e traditori

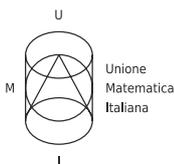
La prova dell'arco

Scetticismo di una moglie

Gara del Pubblico - Classifica domande

UU:UU





Unione
Matematica
Italiana



XV GARA NAZIONALE A SQUADRE

Credits – 9-10 Maggio 2014



ZANICHELLI

Ringraziamenti

Si ringraziano per il loro aiuto nella selezione dei problemi, la preparazione e il controllo dei testi e la loro ambientazione:

Claudio Afeltra, Giovanni Barbarino, Marco Barberis, Matteo Barucco, Lorenzo Benedini, Alessandro Bertinelli, Andrea Bianchi, Luigi Amedeo Bianchi, Alessandra Caraceni, Danilo Ciaffi, Nirvana Coppola, Jacopo D'Aurizio, Simone Di Marino, Fabio Ferri, Francesco Florian, Giada Franz, Carmine Frascella, Luca Ghidelli, Federico Glaudo, Emanuele Grossi, Alessandro Iraci, Kirill Kuzmin, Paolo Leonetti, Guido Lido, Fabio Lilliu, Valentino Liu, Davide Lofano, Davide Lombardo, Alessandro Malusà, Marcello Mamino, Giulio Mandorli, Andrea Maticic, Stefania Monica, Riccardo Morandin, Luigi Pagano, Roberto Pagaria, Giovanni Paolini, Andrea Parma, Federico Poloni, Pino Rosolini, Matteo Stefanini, Federica Surace, Luca Tonelli, Marco Trevisiol, Emanuele Tron, Francesco Veneziano, Angela Veronese, Matteo Verzobio, Silvia Vistoli, Oliver Walton.