Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{7} = 2,6458$ $\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

12 Marzo 2010

Coppa Fermat – Testi dei problemi

1. La passeggiata (Daniele Boccalini)

Frank porta a passeggio il cane lungo il muro est del penitenziario, perfettamente rettilineo e lungo 9 km. Partono dal portone del penitenziario, proprio all'inizio del muro est, fianco a fianco, e iniziano un gioco: Frank tira la palla, il cane gliela riporta, Frank la ritira immediatamente, e altrettanto istantaneamente il cane riparte dietro alla palla. Per tutta la durata del gioco Frank cammina a 6 km all'ora e il cane a 12 km all'ora. Arrivati alla fine del muro, ritornano continuando a fare il gioco fino al portone. Quanta strada al massimo può far fare Frank al cane tirando opportunamente la palla? Dare la risposta in hm.

2. La coda (Alessandro Rosolini)

La macchina che stampa i biglietti d'attesa negli uffici comunali a Chicago produce biglietti numerati da 1 a 99; il numero è preceduto da una lettera dell'alfabeto, la quale cambia in ordine alfabetico ogni 99 stampe. Per velocizzare i tempi, si stabilisce che ogni numero chiamato possa portare con sé agli sportelli tante persone quanto è il valore indicato dal suo biglietto. Ad esempio, la persona che ha il biglietto D7 porta con sé D8, D9, D10... fino a D14. Jake ha ritirato il biglietto Q3, ed è appena stata chiamata la persona che ha il biglietto L75. Quante persone andranno assieme a Jake allo sportello, lui compreso?

3. La gara di corsa, I (Martina Rovelli)

Alan, Bob, Claire, e Duncan fanno una gara di corsa. Dopo vengono intervistati e ciascuno dice la sua:
Alan: «Bob non è vicino a Duncan (in posizione d'arrivo).»
Bob: «Alan non è ultimo.»
Claire: «Non sono subito dopo Bob (in posizione d'arrivo).»
Duncan: «Né io né Bob abbiamo vinto.»
Tuttavia uno e uno solo tra loro è bugiardo. Elwood sa chi mente e, ascoltando queste frasi, pensa: «So con assoluta certezza l'ordine d'arrivo dei corridori.» Scrivere chi è il bugiardo e, a seguire, l'ordine dei corridori sul podio, usando `1` per indicare Alan, `2` per indicare Bob, `3` per indicare Claire e `4` per indicare Duncan.

(^{0}) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore del testo.

4. La paga dei musicisti (Martina Rovelli)

Murph spiega ai tre Magic Tones come sarà diviso il denaro che spetta loro per la loro performance, come prevede il regolamento del Sindacato Musicisti. Murph spiega: «Metà del denaro sarà diviso tra voi in parti uguali, l'altra metà vi sarà assegnata proporzionalmente alla vostra età in anni.» Sapendo che il musicista più vecchio riceverà, a conti fatti, 40 dollari, e che la sua età è la somma delle età degli altri due, a quanto ammonta in centesimi di dollaro la somma da spartire?

5. I voti (Martina Rovelli)

Molto soddisfatta dei risultati dei suoi 11 alunni, la Madre Superiora, direttrice dell'Istituto di St. Helen of the Blessed Shroud, assegna ad ognuno un numero diverso tra 7 e 17 e li mette alla prova con un problema: scrive alla lavagna il numero 360360. Poi spiega: «Questo è il prodotto dei numeri relativi agli alunni che hanno preso 10, tutti gli altri hanno preso 8.» Qual è la somma dei numeri assegnati agli alunni che non hanno preso 10?

6. Il lago nel parco (Alessandro Rosolini)

Un parco comprende un lago di forma quadrata, di cui ogni sponda costituisce la base di un'aiuola a forma di triangolo equilatero. I quattro vertici delle aiuole che non sono sul lago, sono uniti a due a due da recinti rettilinei. Il terreno fra aiuole e recinti è lasciato incolto. L'area del lago è di 9747 metri quadrati, quanti sono i metri quadrati dell'area del terreno incolto?

7. Un gioco d'azzardo, I (Alessandro Rosolini)

Jake e Sline fanno un gioco d'azzardo: si dividono tra loro un mazzo di 4020 carte da poker, ciascuna delle quali reca un seme rosso oppure un seme nero. Ciascuno appoggia il suo mazzo di 2010 carte coperto sul tavolo e iniziano a giocare. Scoprono insieme una carta: se i semi delle due carte sono di colore diverso, Sline paga un dollaro ad Jake, se i semi di entrambe sono rossi non succede nulla, se i semi di entrambe sono neri Jake paga 2 dollari a Sline. Per una fortuita coincidenza nel mescolamento, le carte di Jake sono una sequenza di una carta di seme rosso e una di seme nero (cioè rosso, nero, rosso, nero, rosso. . .) mentre quelle di Sline sono una sequenza di una carta di seme nero seguita da due di seme rosso (cioè nero, rosso, rosso, nero, rosso, rosso, nero,. . .). Sapendo che iniziano il gioco avendo 2010 dollari a testa, quanti dollari ha il vincitore alla fine?

8. La minestra di ceci (Daniele Boccalini)

Slim è molto scaramantico nel preparare la minestra di ceci. Compra i ceci e poi li divide in due piatti, in modo che ce ne siano esattamente lo stesso numero. Dà quelli che avanzano (e solo quelli) al suo pappagallo Fuzz. Poi divide tutti i ceci che ha tenuto equamente in sei piatti, e come prima quelli che avanzano li mangia Fuzz. A questo punto ripete la stessa operazione con trenta piatti, poi con 210 piatti e quindi con 2310 piatti. Considerando che oggi vuole comprarne in modo che il pappagallo possa mangiarne il maggior numero possibile, ma non spendendo più del necessario, quanti ceci deve comprare?

9. Un gioco d'azzardo, II (Alessandro Rosolini)
Jake e Sline si erano accorti che i due mazzi avevano una strana sequenza dei colori dei semi quando avevano giocato la prima volta. Decidono di fare una rivincita usando esattamente la stessa sequenza, ma smetteranno soltanto quando uno dei due resta con metà soldi (ovviamente, se non ci sono abbastanza carte, riprendono quelle usate mettendole nella esatta sequenza). Come prima, ciascuno inizia con 2010 dollari. Dopo quanti turni finisce la partita?

10. I fagioli (Emilio Esposito)
Sam e Dave hanno un sacchetto contenente migliaia di fagioli. I due fanno un gioco che consiste nel prendere, a turno, un numero di fagioli compreso tra 1 e 8. Vince chi estrae l'ultimo fagiolo. Sam decide quanti fagioli mettere nel sacchetto e Dave inizia a pescare, da qui in poi pescano alternatamente. Quale sarà la minima quantità di fagioli superiore a 2010 che Sam dovrà scegliere per assicurarsi la vittoria?

11. La festa jazz (Martina Rovelli)
Matt e Lou organizzano insieme una festa tra jazzisti, noleggiando un locale che costa 8 dollari per ogni persona presente per ogni ora. Arrivano tutti gli invitati, e, dopo aver ballato, bevuto e suonato per 5 ore di seguito, un decimo dei presenti lascia la festa. Allo scoccare dell'ora successiva se ne va un nono delle persone rimaste. Dopo altri 60 minuti un ottavo dei rimanenti abbandona la festa, e così via con questo criterio, finché non se ne va la metà di quelli ancora presenti. A questo punto sono rimasti solo Matt e Lou che restano ancora un'ora a mangiare quel che resta e saldano il conto col locale. Quanti dollari devono pagare?

12. I libri (Martina Rovelli)
Alan, Bob, Claire e Duncan sono compagni di scuola. Studiano tre materie scientifiche: Scienze, Fisica, Geometria, e cinque materie umanistiche: Latino, Greco, Lettere, Storia, Filosofia. Siccome le cartelle sono troppo pesanti, si accordano per portare ciascuno quattro libri di quattro materie con iniziali diverse, delle quali almeno una scientifica, e in modo tale che in totale abbiano due libri per ogni materia. Si sa inoltre che:

- Alan e Duncan hanno almeno due materie in comune;
- Bob porta Filosofia e Lettere;
- Claire ha tutte le materie scientifiche;
- Alan e Bob hanno in comune solo Greco;

Scrivere, in ordine alfabetico, le materie che porta Duncan, indicando le materie, in ordine alfabetico, con le cifre da `1` a `8`.

13. Le stelle di carta, I (Emilio Esposito)

Il reverendo Cleophus James prepara stelle di carta colorate per decorare la Chiesa di Triple Rock. Per disegnare una stella a 5 punte, segna 5 punti distinti su una circonferenza e li unisce con 5 segmenti senza mai staccare la penna dal foglio. In questo modo può disegnare solo un tipo di stella. Con 7 vertici ne può disegnare invece due tipi differenti, collegando i vertici saltandone di volta in volta uno oppure due, rispettivamente. Quanti tipi differenti di stelle può disegnare se segna 2011 vertici sulla circonferenza?

14. Avvitati e schiatta (Daniele Boccalini)

Chiusa nel salone di bellezza *Curl up and Dye*, Carrie si concentra calcolando a mente lunghe somme. L'ultima che ha calcolato è la somma di quei numeri interi positivi dispari minori di 100 che si possono scrivere in almeno due modi distinti come differenza di quadrati perfetti non nulli. Che numero ha trovato?

15. I poligoni inscritti (Daniele Boccalini)

In una circonferenza di raggio 1 m si traccia, come primo passo, il diametro. Come secondo passo, si segnano i punti di mezzo di ciascuno dei due archi così formati e si uniscono i vertici del diametro e i due punti di mezzo in modo da ottenere un quadrato. Si continua bisecando ogni arco formato al passo precedente e si uniscono i punti segnati sulla circonferenza in modo da ottenere un poligono regolare. Quanti passi bisogna fare almeno perché il lato del poligono che si ottiene sia più corto di $\frac{1}{2^{2010}}$ m?

16. Un gioco di biglie (Giuseppe Rosolini)

Un gioco d'azzardo si gioca con un sacchetto contenente 2010 biglie, 2 rosse, tutte le altre nere. Si vince se, estraendo biglie una dopo l'altra quante se ne vuole, si estraggono tutte le biglie rosse (non importa quante nere). Un giocatore, prima di iniziare la sequenza di estrazioni, deve pagare 1 dollaro per ciascuna estrazione che intende fare. Quanti dollari deve pagare Jake per avere una probabilità superiore al 50% di vincere?

17. La cassaforte della Contea (Martina Rovelli)

La combinazione della cassaforte della Contea di Cook è formata da cinque cifre. Steven ricorda che

- La prima cifra è 1;
- Tutti i numeri formati considerando ogni coppia di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 2;
- Tutti i numeri formati considerando ogni terna di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 3;

- Tutti i numeri formati considerando ogni quaterna di cifre adiacenti, prese nello stesso ordine con cui compaiono nella combinazione, sono divisibili per 4^2;
- la combinazione, letta come numero di cinque cifre, è divisibile per 5.

Scrivere nell'ordine le ultime quattro cifre della combinazione.

18. La gara di corsa, II (Martina Rovelli)
Forse Elwood si sbagliava riguardo al bugiardo nella gara di corsa tra Alan, Bob, Claire, e Duncan. Sapendo soltanto che esattamente uno dei quattro è bugiardo, ma che il vincitore non mente, dire:

1. chi sicuramente non ha vinto;
2. chi sicuramente non è arrivato ultimo;
3. chi è subito dopo Bob (in posizione d'arrivo);
4. chi sicuramente non è bugiardo;

Scrivere la risposta a ciascun punto nella casella omonima (cioè la risposta al punto 1. nella prima casella da sinistra, la risposta al punto 2. nella seconda casella da sinistra, e così via), usando `1` per indicare Alan, `2` per indicare Bob, `3` per indicare Claire, `4` per indicare Duncan, e `0` per indicare che la richiesta non ha risposta unica.

19. Il mausoleo (Alessandro Rosolini)
Il comandante del gruppo degli Illinois Nazis si è fatto costruire un mausoleo, costruito con blocchi di pietra cubici, di lato 1 m. Formato da 10 gradoni, sembra una ziqqurat: ogni gradone è un parallelepipedo a base quadrata, e tutti i gradoni sono poggiati uno sull'altro. La cima del mausoleo è un gradone di lato 2 m e altezza 2520 m. Ma la principale peculiarità del mausoleo consiste nel fatto che ogni gradone ha il lato del quadrato di base inferiore di 2 metri esatti di quello sottostante e le superfici laterali di ogni gradone sono sempre uguali. Quanti metri è alto il mausoleo?

20. Le stelle di carta, II (Emilio Esposito)
Aiutando il reverendo James, invece di segnare 2011 punti distinti sulla circonferenza, Jake ne ha segnati 2010. Quanti tipi differenti di stelle può disegnare?

21. I drappelli (Giuseppe Rosolini)
Per rintracciare i Blues Brothers, il comandante degli Illinois Nazis vuole formare 3 drappelli da un gruppo di 9 volontari. Conoscendo la loro incapacità innata, il comandante designa 3 capitani di drappello tra i 9 volontari: Al, Bruno e Cal. Inoltre, vuole che, in ciascun drappello, ci sia almeno un altro componente, oltre al capitano. Quante terne di drappelli diverse può formare il comandante?

22. Le regole del motel, I (Giuseppe Rosolini, Francesco Morandin)
All'ingresso del motel, Twiggy ha trovato le regole seguenti

$$0 \star 0 = 1 \qquad 0 \star (m+1) = 0 \qquad (n+1) \star 0 = (n+1) \times (n \star 0)$$
$$((n+1) \star (m+1)) = (n+1) \times [((n+1) \star m) + (n \star (m+1))].$$

Capisce che permettono di calcolare il valore della scrittura $n \star m$ per ogni coppia di numeri interi positivi o nulli: Aspettando Elwood, Twiggy calcola quanto vale $\frac{5 \star 5}{1000}$. Che numero trova?

23. Un altro gioco di biglie (Giuseppe Rosolini, Francesco Morandin)
Un altro gioco d'azzardo si gioca sempre con un sacchetto contenente 2010 biglie, 7 rosse e tutte le altre nere. Le regole prevedono di estrarre le biglie una alla volta fino a che non siano uscite tutte le rosse: a quel punto il gioco è finito. Elwood si chiede mediamente quante estrazioni duri il gioco. Jake non capisce esattamente cosa intenda suo fratello, ma Ray, che la sa lunga, gli spiega che tra i tanti modi di definire il numero medio di estrazioni del gioco (tutti che portano allo stesso risultato) quello più interessante è la somma delle probabilità p_k dove, per ogni numero naturale $0 \leq k \leq 2010$, p_k è la probabilità che, dopo la k-esima estrazione, non siano uscite tutte le 7 biglie rosse. Qual è il numero medio di estrazioni?

24. Le regole del motel, II (Giuseppe Rosolini, Riccardo Morandin)
Elwood non arriva. Per passare il tempo, Twiggy cerca il più piccolo numero n tale che $3 \star n$ sia multiplo di 73. Qual è il numero n?

Soluzioni per la Coppa Fermat 2010

The Band

Martina Rovelli	*Lead Vocals*
Daniele Boccalini	*Lead Guitar*
Emilio Esposito	*Bass Guitar*
Alessandro Rosolini	*Keyboards*
Francesco Morandin	*Alto Saxophone*
Riccardo Morandin	*Trumpet*
Giuseppe Rosolini	*Drums and Percussion*
Special Thanks to	*Andrea Anfosso, Alessio Carrà*
	Alessandro Logar, Edi Rosset
	Emanuela Sasso, Ernesto De Vito

Soluzione del problema 1. Poco importa di quanto Frank si sforzi a pensare alla strategia migliore, se lui ci mette tre ore a fare il percorso, all'inizio è vicino al cane, alla fine giungono contemporaneamente, per esattamente altrettanto tempo cammina il cane, che percorre quindi 36 chilometri.
La risposta è `0360`.

Soluzione del problema 2. La chiamata dei numeri è data dalla successione definita per ricorrenza

$$\begin{aligned}&(a(0), b(0)) = (c_0, i_0)\\&(a(n+1), b(n+1)) = (a(n) + [\tfrac{2a(n)+1}{99}], (2a(n)+1)\mathrm{mod}99)\end{aligned}$$

dove c_0 è la posizione della lettera L nell'alfabeto italiano e $i_0 = 75$. La sequenza si sviluppa come segue

L75	M52	N 6	N13	N27	N55	O12	O25	
O51	P 4	P 9	P19	P39	P79	Q60	R22	...

La risposta è `0080`.

Soluzione del problema 3. Se il bugiardo fosse Alan, ho almeno due combinazioni possibili: A-B-D-C-, e A-C-B-D. Se il bugiardo fosse Duncan, ho almeno due combinazioni possibili: B-A-C-D, e B-A-D-C. Se il bugiardo fosse Bob non ho combinazioni possibili: infatti avrei che A è ultimo, e B e D, dovendo essere ad almeno due posti di distanza, si trovano uno al primo e uno al terzo posto, ma questo contraddice l'affermazione di Diana. Il bugiardo è dunque Claire, e vi è un'unica combinazione accettabile: il primo non può essere Claire, perché segue Bob,non può essere Duncan o Bob per l'affermazione di Duncan, dunque è Alan. A questo punto Duncan può essere secondo, seguito da Bob e Claire, o ultimo, preceduto da Bob e Claire. La prima non è accettabile perché contraddice l'affermazione di Alan. Dunque l'ordine di arrivo è: 3123.
La risposta è `3123`.

Soluzione del problema 4. Sia $2n$ la cifra totale da spartire. Il musicista più anziano riceve $\frac{n}{3} + \frac{n}{2}$ perché la somma delle età dei tre corrisponde a due volte

l'età del più vecchio. Da $\frac{n}{3} + \frac{n}{2} = 4000$ ricavo $n = 4800$, e dunque il denaro da spartire è di $2n = 2 \times 4800 = 9600$ dollari.
La risposta è `9600`.

Soluzione del problema 5. La fattorizzazione di 360360 è $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$. Dunque tra gli addendi cercati compaiono certamente 11 e 13 e non ci sono il 16 e il 17. Se comparisse il 7, e non il 14, dovrei ancora sistemare $2^3 \times 3^2 \times 5$. Il 5 può comparire nel 10 o nel 15, ma in entrambi i casi avanza un numero inadeguato: $2^2 \times 3^2 = 36$ oppure $2^3 \times 3 = 24$. Allora compare il 14. Rimane ora $2^2 \times 3^2 \times 5$: non può esserci il 10 perché avanzerebbe $2 \times 3^2 = 18$, quindi compare il 15. Avanza $2^2 \times 3 = 12$. Quindi gli addendi cercati sono i numeri da 7 a 16 esculsi 11, 12, 13, 14, 15. il numero richiesto è dunque: $7 + 8 + 9 + 10 + 16 + 17 = 67$.
La risposta è `0067`.

Soluzione del problema 6. Sia k il lato del lago. La figura formata dai recinti è un quadrato. L'altezza di ciascun triangolo equilatero è $\frac{\sqrt{3}}{2}k$ e la diagonale del quadrato formato dai recinti è $k(1 + \sqrt{3})$. Dunque l'area del recinto totale è $k^2 \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = k^2(2 + \sqrt{3})$ metri quadrati, quella del lago k^2 metri quadrati, quella dei 4 triangoli $4k^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = k^2\sqrt{3}$ metri quadrati, si ha che l'area dei terreni incolti è $k^2 \mathrm{m}^2$.
La risposta è `9747`.

Soluzione del problema 7. La partita si svolge nel modo seguente:

turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Jake	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	...
Sline	n	r	r	n	r	r	n	r	r	n	r	r	n	r	r	...

Sia $k = 2010$. Ogni 6 round, dopo i primi 4, Jake guadagna un dollaro (e quindi Sline ne perde uno): quindi vince Jake, e dopo $4 < n$ turni i dollari che ha si calcolano come

$$\begin{array}{ll} k + [\frac{n-4}{6}] & \text{se } n = 4, 5 \bmod 6 \\ k + [\frac{n-4}{6}] + 1 & \text{se } n = 0 \bmod 6 \\ k + [\frac{n-4}{6}] + 2 & \text{se } n = 1 \bmod 6 \\ k + [\frac{n-4}{6}] + 3 & \text{se } n = 2, 3 \bmod 6 \end{array}$$

La risposta è `2345`.

Soluzione del problema 8. Dato che $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$, la somma dei resti coincide con il resto che si ottiene dividendo subito in 2310 piatti poiché, se $q_0 = q_1 p_1 + r_1$ con $0 \leq r_1 < p_1$, dalla divisione

$$q_1 = q_2 p_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < p_2$$

si ottiene anche la divisione $q_1 p_1 = q_2 p_1 p_2 + p_1 r_2$ dato che $0 \leq p_1 r_2 < p_1 p_2$. Il massimo resto è 2309.
La risposta è `2309`.

Soluzione del problema 9. Smettono appena Jake vince $\frac{2010}{2} = 1005$ dollari. Visto come si sviluppa la sequenza di vincite, si deve trovare il primo numero

n tale che la sua divisione per 6 abbia resto 5 e il quoziente per 6 di $n-4$ sia 1002, cioè $n-4 = 1002 \times 6 + 1$. Così $n = 6017$, a quel punto Jake vince 1002 dollari; la partita finisce tre turni dopo.
La risposta è `6020`.

Soluzione del problema 10. Un gioocatore può sempre attuare la strategia di togliere la differenza da 9 dell'estrazione dell'altro giocatore, in modo che dopo due estrazioni vengano tolti esattamente 9 fagioli. Il giocatore tra i due che, attuando questa strategia, fa in modo che restino nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 9, vince. Perciò, il solo modo che il primo ha per vincere, è quello di mettere nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 9. Per ogni altro numero di fagioli, il secondo giocatore si assicura la vittoria.
La risposta è `2016`.

Soluzione del problema 11. Sia n il numero dei presenti alla festa; dopo 5 ore ne sono rimasti $n(1-\frac{1}{10}) = n\frac{9}{10}$; un'ora dopo $n\frac{9}{10}(1-\frac{1}{9}) = n\frac{9}{10}\frac{8}{9} = n\frac{8}{10}$. Ad ogni ora il numero dei rimasti diminuisce di $\frac{n}{10}$, finché il numero diventa 2. Da $\frac{n}{10} = 2$ si trova $n = 20$, gli ultimi se ne vanno dopo 14 ore. Il prezzo è $8 \times 2 \times (5 \times 10 + 9 + 8 + \ldots + 1) = 8 \times 2 \times (50 + 45) = 1520$.
La risposta è `1520`.

Soluzione del problema 12. Poiché Alan e Bob hanno in comune solo Greco, e Bob porta Filosofia e Lettere, segue che Alan porta Fisica e Latino. Siccome Bob deve portare almeno una materia scientifica, Bob porta Scienze e Alan Storia. Siccome Claire porta Scienze e Fisica, Duncan porta Filosofia e Storia; inoltre gli spetta anche un libro di Geometria, perché quelli di Greco sono esauriti da Alan e Bob. Infine si sa che Duncan ha già in comune con Alan Storia, e non Geometria e Filosofia, quindi deve portare la stessa materia con la L, cioè Latino. In conclusione Duncan porta Filosofia, Storia, Geometria e Latino.
La risposta è `1358`.

Soluzione del problema 13. Per un numero primo di vertici, collegando un vertice con un altro $k < p$ vertici più avanti (cioè $k > 0$), si collegano tutti dato che $\mathrm{mcd}(k, p) = 1$. Per disegnare una stella, non posso usare $k = 1$. Inoltre per $k' = p - k$ si ottiene lo stesso poligono che si ottiene con k. Perciò le stelle diverse sono $\frac{(p-1)-2}{2} = \frac{p-3}{2}$.
La risposta è `1004`.

Soluzione del problema 14. Un numero x che si scrive come la differenza dei due quadrati $a^2 - b^2$ si scompone nei due fattori $x = (a+b)(a-b)$. Dato che ogni numero dispari $x = 2k+1$ si scrive certamente come differenza $(k+1)^2 - k^2$, per scriverlo in almeno un altro modo deve essere scomponibile in due fattori (dispari) diversi da 1 e diversi tra loro: è un numero dispari che non è primo e neppure quadrato di un numero primo. Si devono sommare tutti quelli inferiori a 100. Sono

$$\begin{array}{ccccccccccc} 15 & 21 & 27 & 33 & 35 & 39 & 45 & 51 & 55 & 57 & 63 \\ 65 & 69 & 75 & 77 & 81 & 85 & 87 & 91 & 93 & 95 & 99. \end{array}$$

La somma è 1358.
La risposta è `1358`.

Soluzione del problema 15. All'n-esimo passo si ottiene un poligono di 2^n lati. Sia k_n la lunghezza del lato all'n-esimo passo. La formula generale per k_n non serve, si deve solo trovare il primo n tale che $k_n \leq 2^{-q}$ per $q = 2010$. Partendo dal quadrato e considerando la circonferenza, vale: $2^2 = 4 < 4\sqrt{2} < k_n 2^n < 2\pi < 8 = 2^3$. Perciò, qualunque sia n, si ha che $\frac{1}{2^{n-2}} < k_n < \frac{1}{2^{n-3}}$. Allora il minimo n è $q + 3$.
La risposta è `2013`.

Soluzione del problema 16. Sia n il numero totale di biglie, siano a le biglie rosse. Dopo k estrazioni successive, le raccolte di biglie possibili sono $\binom{n}{k}$, mentre le raccolte favorevoli (quelle che includono le a biglie rosse) sono $\binom{n-a}{k-a}$. Le probabilità che esca entro l'estrazione k sono $\binom{n}{k}^{-1}\binom{n-a}{k-a} = \frac{(n-a)!k!(n-k)!}{n!(k-a)!(n-a-(k-a))!} = \frac{(n-a)!k!}{n!(k-a)!}$. Per $a = 2$ la soluzione è il più piccolo k tale che $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} > \frac{1}{2}$. Risolvendo l'equazione $x(x-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ si trova che $k > \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 + (n-1)^2}$, cioè $k > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2010^2 + 2009^2}) \approx 1421.4$.
La risposta è `1422`.

Soluzione del problema 17. Siano $abcd$ le cifre da inserire in ordine. Dalla seconda segue che tutte le cifre richieste sono pari, e $d = 0$ per la quarta. Dalla terza, $a + b + 1$, $a + b + c$ e $b + c$ sono multipli di 3, dunque a è un multiplo di 3, così come $c - 1$ e $b + 1$, cioè $a = 0, 6$, $b = 2, 8$ e $c = 4$. Il numero è allora uno tra 10240, 10840, 16240, 16840. Ma 1084, 1624 e 1684 non sono divisibili per 16. Dunque il numero è 10240.
La risposta è `0240`.

Soluzione del problema 18. Considerando le quattro affermazioni, e supponendo che una e una sola tra esse sia falsa, si ottiene che:

- se il bugiardo fosse A i casi possibili sono: ABDC, ACBD, ACDB, CABD, CADB;
- Se il bugiardo fosse B non ho casi possibili;
- se il bugiardo fosse C l'unico caso possibile è ABCD;
- se il bugiardo fosse D i casi possibili sono BACD, BADC, DACB, DCAB;

Escludendo che il vincitore sia bugiardo, le combinazioni che rimangono valide sono: CABD, CADB, ABCD, BACD, BADC. D è l'unico a non comparire al primo posto e A è l'unico a non comparire all'ultimo posto. B è l'unico sicuramente sincero. Non si può dire chi sia dopo B. Dunque la risposta (dopo opportune codifiche), è 4102
La risposta è `4102`.

Soluzione del problema 19. Sia n il numero dei gradoni, sia k e x_0 il lato e l'altezza del gradone in cima alla piramide. La superficie laterale di ogni gradone è 4 volte l'area del rettangolo avente come base il lato del quadrato base del gradone e come altezza l'altezza del gradone. Quindi la proporzione tra le superfici laterali è la stessa tra le aree dei rettangoli. Partendo dall'ultimo gradone, si ha che il lato di base di quello sottostante è uguale a $k+2$; l'altezza x_1 si ricava dall'uguaglianza $x_0 k = x_1(k+2)$, cioè $x_1 = x_0 \frac{k}{k+2}$. Proseguendo per ricorsione, si ha che l'altezza x_i dell'$i-1$-esimo è $x_i = x_0 \frac{k}{k+2i}$. Quindi l'altezza totale della ziqqurat è uguale alla somma delle n altezze

$$\begin{aligned} h &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= x_0 + x_0 \tfrac{k}{k+2} + \ldots + x_0 \tfrac{k}{k+2n} \\ &= x_0 k \left(\tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k+2} + \ldots + \tfrac{1}{k+2n-2}\right) \end{aligned}$$

La risposta è `7381`.

Soluzione del problema 20. Nel caso che p non sia primo, devo contare i numeri $1 < k < [p/2]$ e tali che $\mathrm{mcd}(p,k) = 1$, cioè $\frac{\phi(2010)}{2} - 1 = \frac{1 \times 2 \times 4 \times 66}{2} - 1 = 263$ dato che la scomposizione di 2010 in fattori primi è $2 \times 3 \times 5 \times 67$. Si possono anche contare direttamente: indicando con A_n i multipli di n compresi tra 1 e 1005, si ha che

gli elementi di	sono	gli elementi di	sono	gli elementi di	sono
A_2	502	$A_2 \cap A_3 = A_6$	167	$A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$	33
A_3	335	$A_2 \cap A_5 = A_{10}$	100	$A_2 \cap A_3 \cap A_{67} = A_{402}$	2
A_5	201	$A_3 \cap A_5 = A_{15}$	67	$A_2 \cap A_5 \cap A_{67} = A_{670}$	1
A_{67}	15	$A_2 \cap A_{67} = A_{134}$	7	$A_3 \cap A_5 \cap A_{67} = A_{1005}$	1
		$A_3 \cap A_{67} = A_{201}$	5		
		$A_5 \cap A_{67} = A_{335}$	3		

e i numeri $1 \leq k \leq [p/2]$ e tali che $\mathrm{mcd}(p,k) = 1$ sono

$$A_1 \smallsetminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_{67})$$

che sono $1005 - (502+335+201+15) + (167+100+67+7+5+3) - (33+2+1+1) = 264$. Bisogna sottrarre 1 per escludere 1.
La risposta è `0263`.

Soluzione del problema 21. Sono le suriezioni da un insieme di $m-n$ elementi ad un insieme di n elementi (vedi esercizio successivo: $n \star (m-2n)$) che si contano con i numeri di Stirling del II tipo:

$$\sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{m-n}.$$

Nel caso in questione, si possono anche contare le funzioni dall'insieme dei sei soldati all'insieme $\{A, B, C\}$ che non sono suriezioni: sono tutte le funzioni che hanno immagine in un insieme di due elementi. Ci sono 3 sottoinsiemi di tre elementi, per ciascuno di questi le funzioni sono 2^6. In questo modo si contano due volte le funzioni costanti. In totale le funzioni che non sono suriettive dall'insieme dei soldati all'insieme $\{A, B, C\}$ sono $3 \times 2^6 - 3$. La risposta è $3^6 - (3 \times 2^6 - 3) = 540$.
La risposta è `0540`.

Soluzione del problema 22. Il valore $a \star (b-a)$ è il numero di suriezioni da un insieme di b elementi ad un insieme di a elementi. Infatti, da un insieme di 0 elementi c'è esattamente una funzione verso un altro insieme: quest'unica è suriettiva se e solo se l'altro insieme ha pure 0 elementi. Ogni suriezione da un insieme X con $(b+1)+c$ elementi a un insieme Y con $b+1$ elementi è totalmente determinata dal suo valore in Y su un fissato argomento $\overline{x}$ di X, insieme con una funzione da $f : X \setminus \{\overline{x}\} \to Y$. I casi possibili sono due: f è suriettiva su Y oppure no. Nel secondo caso le coppie che determinano completamente la suriezione data sono il prodotto del numero di sottoinsiemi di Y con b elementi e del numero di suriezioni da un insieme con $b+c$ elementi ad uno con b elementi, cioè $\binom{b+1}{b}(b \star c) = (b+1)(b \star c)$. Il primo caso si presenta soltanto se $c \neq 0$ e, se questo avviene, le coppie di questo tipo che determinano completamente la suriezione data sono il prodotto del numero di elementi di Y e del numero di suriezioni da un insieme con $b+c$ elementi ad uno con $b+1$ elementi, cioè $(b+1) \times [(b+1) \star (c-1)]$.
La risposta è `5103`.

Soluzione del problema 23. Sia n il numero totale di biglie, siano a le biglie rosse. Dopo k estrazioni successive, $p_k = 1 - \frac{\binom{n-a}{k-a}}{\binom{n}{k}} = 1 - \frac{\binom{k}{a}}{\binom{n}{a}}$ dato che $\binom{n-a}{k-a}\binom{n}{a} = \binom{n}{k}\binom{k}{a}$. La somma che definisce il tempo medio di completamento è

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = (n+1) - \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{a}}{\binom{n}{a}}.$$

Dato che $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = (n+1) - \frac{\binom{n+1}{a+1}}{\binom{n}{a}} = (n+1) - \frac{n+1}{a+1} = (n+1)\frac{a}{a+1} \approx 1759.62$$

La risposta è `1759`.

Soluzione del problema 24. Il valore $a \star (b-a)$ è il numero di suriezioni da un insieme di b elementi ad un insieme di a elementi. Perciò, per calcolare $3 \star n$ si devono contare le suriezioni da un insieme di $n+3$ elementi, diciamo A, a un insieme di 3 elementi: sono tutte le funzioni da A a quello di 3 elementi, diciamo $\{F, I, V\}$, escluse le suriezioni da A a uno di 2 elementi e le suriezioni dall'insieme $n+3$ elementi a uno di 1 elemento (in entrambi i casi, contate tre volte perché i sottoinsiemi di due elementi di $\{F, I, V\}$ sono tre così come i suoi sottoinsiemi di un elemento). Una suriezione da A a un insieme di 2 elementi, diciamo l'insieme $\{F, V\}$, è precisamente un sottoinsieme non-vuoto e non-totale di A. Perciò sono $2^{n+3} - 2$. Dunque $3 \star n = 3^{n+3} - 3 \times (2^{n+3} - 2) - 3 \times 1 = 3^{n+3} - 3 \times 2^{n+3} + 3$. Dato che 73 è primo, basta trovare il più piccolo n tale che $73 | (3^{n+2} - 2^{n+3} + 1)$. I possibili resti delle divisioni delle potenze di 3 con 73 sono 12 e si presentano in sequenza:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3^{n+2}	9	27	8	24	72	70	64	46	65	49	1	3	9

Quelli delle divisioni di 2 con 73 sono 9 e si presentano in sequenza:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{n+3}	8	16	32	64	55	37	1	2	4	8

I resti di una potenza di 2 e di una potenza di 3 la cui differenza è 1 sono $(2, 1)$ e $(4, 3)$. La prima coppia che si può presentare è $(2, 1)$ e avviene per $n = 10 + 12k = 7 + 9h$. Risolvendo $9h - 12k = 3$ si trova $k = 2$, $h = 3$ e $n = 34$. La risposta è `0034`.