Coppa Fermat — Genova, 16 Marzo 2007

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\quad$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\quad$ $\sqrt{6} = 2,4495$ $\quad$ $\pi = 3,1416$.

1. L'ora fatale Al termine di una delicata votazione, il Presidente del Parlamento della Repubblica delle Banane allevia la tensione dei presenti con una osservazione frivola di tipo matematico. "Guardate l'orologio in quest'aula", afferma. "Per 24 ore la somma delle cifre che indica non sarà più uguale a quella che c'è ora. Noi però non possiamo restare qui a controllare in quanto, come sapete, dalla prossima mezzanotte fino alle 03:00 dovremo purtroppo interrompere i lavori per permettere le pulizie nell'aula". Sapendo che nell'aula c'è un normale orologio digitale che indica le ore da 00:00 a 23:59, determinare l'ora indicata.
Nella risposta utilizzare le 2 cifre a sinistra per indicare l'ora e le 2 cifre a destra per indicare i minuti.

2. La riconta Nonostante siano passati parecchi mesi dalle elezioni, nella Repubblica delle Banane non si è ancora fatta del tutto chiarezza sui risultati. La nuova commissione che sta esaminando i verbali provenienti dai seggi si trova spesso di fronte a verbali pasticciati. In uno compare la seguente sottrazione

$$\begin{array}{cccccc} a & 0 & 0 & 8 & c & 2 \quad - \\ 4 & \diamondsuit & \heartsuit & 8 & 8 & d \quad = \\ \hline 2 & \clubsuit & \spadesuit & b & 7 & 3 \end{array}$$

in cui lettere e simboli rappresentano cifre illeggibili (non è detto che simboli e lettere diversi rappresentino cifre diverse). Nonostante tutto, la commissione riesce a ricostruire in parte il calcolo. Indicare nella risposta (da sinistra verso destra) le cifre corrispondenti alle lettere a, b, c, d.

3. Separati in casa Il Parlamento della Repubblica delle Banane ha un cortile triangolare nel quale i Parlamentari sono soliti ricrearsi nelle pause tra i lavori. Per evitare scontri tra le 3 fazioni che si oppongono, si è deciso di suddividere il cortile in 3 zone triangolari mediante delle transenne che partono dai vertici del cortile e concorrono in un punto interno. Il triangolo della Maggioranza e quello dell'Opposizione sono isosceli con base sul lato del cortile che a loro compete. Il lato che hanno in comune è lungo quanto il lato di cortile che appartiene alla zona degli Indecisi. Sapendo che gli angoli alla base del triangolo della Maggioranza misurano 20°, determinare gli angoli del cortile.
Nella risposta, dopo aver ordinato gli angoli (in gradi sessagesimali) dal maggiore al minore, utilizzare le 2 cifre a sinistra per indicare l'angolo di misura intermedia e le 2 cifre a destra per indicare l'angolo minore.

1. Ogni somma che si ottiene nelle ore da 20 a 23 può essere ottenuta sicuramente uguale nelle ore da 11 a 14 (dato che $2 + i = 1 + (i + 1), \quad i = 0, 1, 2, 3$), così come ogni somma che si ottiene nelle ore da 02 a 09 può essere ottenuta anche nelle ore da 11 a 18. Per trovare ore come richiesto, restano soltanto i periodi da 00:00 a 01:59 e da 15:00 a 19:59. Di questi soltanto quelli con somma di minuti minima e massima, rispettivamente, non sono ottenibili in altro modo. Dato che alla mezzanotte i parlamentari sono fuori, la risposta è 1959.

2. Non può che essere $d = 9$; dunque $c = 6$ e $b = 9$. Il riporto dalla terza colonna forza un riporto sulla quarta dove c'è 0, che forza dunque un riporto sulla quinta; lo 0 che si trova qui forza un riport sulla sesta (la più a sinistra). Dunque $a = 7$.

3. I triangoli di Maggioranza e Opposizione sono isosceli e hanno un lato obliquo in comune; dunque i lati obliqui sono tutti uguali: anche il triangolo degli Indecisi è isoscele. Dato che uno di questi (dunque tutti) è uguale al lato di base degli Indecisi, il triangolo degli Indecisi è equilatero. L'angolo al vertice del triangolo della Maggioranza è 140°, quello del triangolo degli Indecisi è 60°; perciò quello del triangolo dell'Opposizione è $360° - (140 + 60)° = 160°$. I lati alla base di questo triangolo sono di 10°. Gli angoli del giardino sono 80°, 70° e 30°.

4. Ungere le ruote In occasione delle festività natalizie, il responsabile di una grande società sull'orlo del fallimento ha preparato 5 pacchi dono per ingraziarsi i potenti di turno. I 5 pacchi contengono orologi, gioielli, quadri d'autore. Per non lasciare troppe tracce nel bilancio, si è appuntato la situazione nel modo seguente:

Pacco 1	Pacco 2	Pacco 3	Pacco 4	Pacco 5
$\diamondsuit\ \diamondsuit$ $\heartsuit\ \heartsuit$ $\heartsuit$	$\heartsuit\ \heartsuit$ $\diamondsuit\ \diamondsuit$	$\heartsuit\ \diamondsuit$ $\diamondsuit\ \diamondsuit$ $\spadesuit\ \spadesuit$ $\spadesuit$	$\spadesuit\ \spadesuit$ $\diamondsuit\ \diamondsuit$ $\diamondsuit\ \diamondsuit$	$\diamondsuit\ \spadesuit$ $\spadesuit\ \spadesuit$ $\spadesuit\ \spadesuit$
110	80	140	130	100

È chiaro che i 3 simboli rappresentano i 3 tipi di oggetto, tutti dello stesso valore (nel senso che tutti gli orologi hanno lo stesso valore, così come i gioielli ed i quadri, ma ovviamente un orologio ed un gioiello possono avere valori diversi). È chiaro anche che il numero indicato sotto il pacco rappresenta il valore totale degli oggetti in esso contenuti, espresso in qualche misteriosa valuta. È chiaro infine che, per complicare ulteriormente le cose, uno dei 5 totali è stato volutamente sbagliato. Determinare come stanno le cose.

Nella risposta utilizzare la cifra a sinistra per indicare il pacco dal valore sbagliato e le restanti 3 cifre per indicare il valore corretto. Se ad esempio si ritiene che il valore del quinto pacco dovrebbe essere 80 invece di 100, rispondere `5080`.

4. Dall'informazione dei primi due pacchi, sottraendo il valore del primo al quello del secondo, si troverebbe che $\heartsuit = 30$. Di conseguenza, $\diamondsuit = 10$. Dal terzo pacco si ricaverebbe che $\spadesuit = \frac{40}{3}$, dal quarto che $\spadesuit = 45$, dal quinto che $\spadesuit = 18$. Purtroppo i tre valori non sono uguali. Dunque il valore di uno dei primi due pacchi è quello sbagliato. Conviene usare i valori degli ultimi due pacchi, sicuramente corretti, per determinare il valore di $\diamondsuit, \spadesuit$.

$$\begin{cases} 4\diamondsuit + 2\spadesuit = 130 \\ \diamondsuit + 5\spadesuit = 100 \end{cases}$$

Così $\spadesuit = 15$ e $\diamondsuit = 25$. Dal terzo pacco $\heartsuit = 140 - 3(15+25) = 20$. Controllando ora i valori dei primi due pacchi, si trova che il secondo pacco vale 90.

5. Amici nemici Sei colleghi devono fare un viaggio di lavoro. A causa di alcune incompatibilità di carattere, decidono di viaggiare a gruppi di 2, usando mezzi di trasporto diversi: aereo, treno, autobus. Francesco viaggia con Gianfranco. Massimo prende l'aereo. Romano non vuole assolutamente viaggiare con Silvio, né prendere l'aereo. Umberto non viaggia in treno. Determinare con quali mezzi viaggeranno i 6 colleghi.

Per scrivere la risposta, usare la convenzione che aereo = 1, treno = 2, autobus = 3, quindi indicare, da sinistra verso destra, i mezzi di trasporto scelti da Francesco, Romano, Silvio, Umberto.

5. Romano non viaggia con Silvio, né con Massimo perché dovrebbe andare in aereo, né con Francesco o Gianfranco che fanno già gruppo. Dunque viaggia con Umberto in autobus. Massimo viaggia con Silvio in aereo, Francesco e Gianfranco viaggiano in treno.

6. Finanziamenti occulti Una nota ditta che produce calzini ha deciso di finanziare la politica nella Repubblica delle Banane. Per non scontentare nessuno ha inviato ai politici un container con 4000 calzini bianchi, 2000 neri, 1600 rossi, 1000 verdi, 800 gialli e 600 blu. Determinare il minimo numero di calzini che bisogna pescare a caso (tutti insieme) in modo da averne poi sicuramente a sufficienza per 2007 persone (si intende che ogni persona dovrà averne 2 dello stesso colore).

6. Servono almeno 4014 calzini. Ne servono di più soltanto se capita di prendere un numero dispari di calzini di un colore. Dato che i colori sono 6, prendendone un numero dispari possono restare al massimo 5 calzini spaiati. Basta prenderne 4019.

7. Exit polls Ad un Referendum hanno partecipato 10.000 elettori, i quali hanno dovuto pronunciarsi sulla costruzione di un nuovo palazzetto in cui svolgere le Gare a Squadre. Tutti hanno regolarmente votato o "Sì" o "No". All'uscita dai seggi un'agenzia di sondaggi ha chiesto a tutti gli elettori di ripetere il proprio voto, in modo da preparare gli exit polls. Tuttavia, come regolarmente accade, il 90% di quelli che hanno votato "Sì" ha dichiarato di aver votato "No", ed il 90% di quelli che hanno votato "No" ha dichiarato di aver votato "Sì". Sapendo che 3600 elettori hanno dichiarato di aver votato "Sì", determinare quanti effettivamente si sono espressi per il "Sì".

7. Sia v il numero degli elettori che ha votato "Sì". Dunque $3600 = \frac{1}{10}v + \frac{9}{10}(10000 - v)$. Perciò $v = \frac{54000}{8} = 6750$.

8. Tagli alla spesa Per fronteggiare l'enorme indebitamento, il governo della Repubblica delle Banane ha varato un piano di tagli alla spesa pubblica. Tale piano prevede che la spesa in ognuno dei prossimi anni sarà il logaritmo della spesa dell'anno precedente, e che tale logaritmo sia calcolato nella base data proprio dall'anno precedente. Così, per esempio, la spesa pubblica nel 2008 sarà il logaritmo in base 2007 della spesa pubblica del 2007, e analogamente la spesa pubblica nel 2009 sarà il logaritmo in base 2008 della spesa pubblica del 2008. Procedendo di questo passo, il governo prevede che nel 2011 la spesa pubblica sarà di soli 2 euro. Indicato con S il numero che indica la spesa pubblica di quest'anno (il 2007), determinare il più grande fattore primo di S.

8. Il numero S è una potenza intera di 2007; perciò il più grande fattore primo di S è il più grande fattore primo di $2007 = 223 \times 9$.

9. L'aiuola bipartisan Il disegno di un'aiuola è composto da 3 circonferenze concentriche di raggio 1, 2, 3 metri, e da 2 rette passanti per il centro delle circonferenze. Le 3 circonferenze e le 2 rette determinano 12 regioni limitate, in ciascuna delle quali vengono piantati dei fiori rossi o verdi, avendo cura che 2 regioni con i fiori dello stesso colore abbiano al più un punto in comune. Sapendo che l'area con i fiori rossi è uguale ad una volta e mezza l'area con i fiori verdi, determinare la misura in gradi sessagesimali dei 2 angoli più piccoli formati dalle 2 rette.

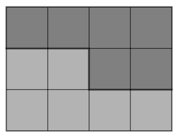
9. L'aiuola è simmetrica rispetto a una (qualunque delle due rette): si consideri dunque soltanto uno dei due semicerchi. Sia x la misura dell'angolo da trovare. L'area con i fiori rossi è proporzionale a $(180 - x) \times 1^2 + (180 - x) \times (3^2 - 2^2) + x \times (2^2 - 1^1) = 6 \times 180 - 3x$; l'area con i fiori verdi è proporzionale a $x \times 1^2 + x \times (3^2 - 2^2) + (180 - x) \times (2^2 - 1^1) = 3 \times 180 + 3x$. Dunque $2 \times 180 - x = \frac{3}{2}(180 - x)$, cioè $x = \frac{180}{5} = 36$.

10. Panem et circenses Pochi sono i momenti in cui si può andare fieri di essere cittadini della Repubblica delle Banane. Tra questi, di sicuro al primo posto ci sono le vittorie nelle grandi competizioni sportive internazionali. Purtroppo queste si sono concentrate in pochi anni. Un esperto di numerologia ha notato che ciò è accaduto in tutti e soli gli anni con questa proprietà: "la somma del numero dell'anno, della somma delle sue cifre, e della somma delle cifre della somma delle cifre è uguale a 2007". Ad esempio, nel 2005 non vi sono state importanti vittorie in quanto $2005 + 7 + 7 \neq 2007$. Determinare la somma dei numeri di tutti gli anni (dal 1900 in poi) in cui si sono avute le grandi vittorie sportive.

10. Dopo il 2000, l'unico anno in cui vi è stata una grande vittoria è stato il 2001, dato che $2001 + 3 + 3 = 2007$. Tra il 1900 e il 1999, la somma delle cifre è compresa tra 10 e 28, la somma di queste è compresa tra 1 e 10. Per ottenere 2007, l'anno deve essere tra il $1969 = 2007 - 38$ e il $1996 = 2007 - 11$. Provando, si trova che 1971 è un anno di grandi vittorie. Si nota poi che, per ogni anno che passa, la somma da controllare cambia per un multiplo di 3 dato che la variazione viene sommata invariabilmente tre volte. Dato che 1971 e 2007 sono multipli di 3, gli altri anni di grandi vittorie devono essere multipli di 3. Iniziando perciò dal 1974, si trova che 1980 e 1983 sono gli unici altri anni di grandi vittorie. La somma è 7941.

11. Confluenze Fatto incredibile: nella Repubblica delle Banane 2 partiti si sono uniti per fondarne uno solo. Per conservare traccia delle 2 diverse tradizioni, il simbolo del nuovo partito contiene un rettangolo suddiviso in 2 parti uguali di colore diverso, la cui forma ricorda vagamente una lettera L. Inoltre, se uno ritaglia le 2 parti, queste possono essere ricomposte per formare un quadrato. Supponendo di effettuare l'operazione a partire da un grande manifesto in cui il rettangolo ha un perimetro di 7020 millimetri, determinare, sempre in millimetri, il perimetro del quadrato che si viene a formare.

11. Per ottenere rettangoli facendo combaciare due L nelle due configurazioni possibili, i due lati di contatto verticali devono essere uguali, così come i due orizzontali.



Per ottenere un quadrato in una della due configurazioni, è necessario la lunghezza della somma di due verticali, diciamo, sia uguale a quella della somma di tre orizzontali. Così, se ℓ è la lunghezza di un lato orizzontale, 12ℓ è il perimetro del quadrato, mentre $2(2\ell + 3\frac{3}{2}\ell) = 7020$mm è il perimetro del simbolo rettangolare, cioè $\ell = \frac{7020}{13} = 540$mm. Il perimetro del quadrato è $540 \times 12 = 6480$.

12. E il barcarolo va ... Massimo sta portando la sua amica Giovanna su per un fiume con una barchetta. Massimo rema controcorrente ad una velocità costante rispetto alla riva di 1 Km/h mentre il fiume scorre con una velocità costante di 2 Km/h (sempre rispetto alla riva). Giovanna appoggia il suo cappellino sul bordo della barchetta e continuando a chiaccherare con Massimo non si accorge che il cappellino cade in acqua e si allontana galleggiando. Solo 30 minuti dopo la caduta del cappellino Giovanna si accorge di averlo perso. Massimo allora gira immediatamente la barca e insegue il capellino remando sempre allo stesso ritmo di prima (mantenendo dunque, in modulo, la stessa velocità relativa rispetto all'acqua). Trascurando il tempo che Massimo impiega a fare la virata, determinare quanti minuti intercorrono tra l'istante in cui il cappellino cade in acqua e quello in cui Giovanna riesce a recuperarlo.

12. Il cappellino galleggia sull'acqua seguendo la corrente; la barca viaggia a 3km/h controcorrente per mezz'ora, poi viaggia a 3km/h seguendo la corrente. Dal punto di vista del cappellino, la barca s'è allontanata, quindi riavvicinata alla stessa velocità: non serve conoscere i valori delle velocità, basta sapere che la velocità della barca rispetto alla corrente–e rispetto al cappellino–è la stessa, solo in direzioni opposte. Recuperano il cappellino dopo 60 minuti dalla caduta in acqua.

13. La voragine Nella Repubblica delle Banane ogni governo si lamenta dei buchi di bilancio lasciati dal governo precedente. Il governo precedente asseriva di aver trovato un debito di 25^{3007} euro. Il governo attuale, per rincarare la dose, asserisce di aver trovato un debito pari a quello lamentato dal governo precedente moltiplicato per 8^{2007}. Determinare quante cifre servirebbero per scrivere per esteso la rappresentazione decimale del numero che indica il debito stimato dal governo attuale.

14. Luci poliedriche Nel salone delle feste del Parlamento vi è un lampadario supermoderno. La forma del lampadario è un poliedro che si può pensare ottenuto partendo da un cubo ed operando 6 "smussamenti". Il primo smussamento consiste nel prendere il cubo e tagliare via un piccolo tetraedro in corrispondenza di ogni vertice del cubo in cui concorrono 3 spigoli: si ottiene così un solido con 6 facce ottagonali (non necessariamente regolari) ed 8 facce triangolari. A questo punto si ripete nuovamente l'operazione di smussamento sul nuovo solido, eliminando un piccolo tetraedro in corrispondenza di ogni vertice del nuovo solido in cui concorrono 3 spigoli, e così via. Determinare quante sono le facce del lampadario.

15. Il buon esempio Si sa che nella Repubblica delle Banane è fatto assoluto divieto ai Parlamentari di consumare, appunto, le banane. Per indagare sull'osservanza di tale disposizione, gli inviati di una nota trasmissione televisiva hanno, con un pretesto, prelevato dei campioni di materiale organico dai Parlamentari stessi, sottoponendoli poi ad analisi per smascherare l'eventuale consumo del frutto proibito. L'indagine si è svolta in 5 giorni consecutivi. Alla fine di ogni giornata gli inviati si sono appuntati il numero dei Parlamentari risultati positivi ed hanno anche calcolato il numero medio di positivi fino a quel giorno. Fatto strano, per 5 volte la media è risultata un intero. Sapendo che il numero dei positivi nei vari giorni è stato di 71, 76, 80, 82, 91 (non necessariamente nell'ordine), determinare quanti sono stati i positivi nel terzo e nel quarto giorno.
Nella risposta utilizzare le 2 cifre a sinistra per indicare il numero dei positivi il terzo giorno, e le 2 cifre a destra per il numero dei positivi del quarto giorno.

16. Non ci capisco un . . . H Passata la Sudoku-mania, un nuovo gioco va per la maggiore nella Repubblica delle Banane. Si parte con uno schemino composto da 7 quadratini uguali, disposti in modo da formare una lettera H. L'obiettivo è di riempire i quadratini usando tutte e sole le cifre da 1 a 7 e facendo in modo che la somma dei 3 numeri scritti su ognuno dei 3 bracci della lettera H sia sempre la stessa. Ordinando in maniera decrescente i numeri di 3 cifre che possono comparire nel tratto orizzontale (ovviamente in uno schemino completamente compilato secondo le regole), determinare la somma dei 3 più grandi.

17. Il rimborso spese Un politico della Repubblica delle Banane ha manomesso il contachilometri della sua auto blu, in modo da far figurare una maggior percorrenza e aumentare corrispondentemente il rimborso spese che gli spetta. In conseguenza della manomissione, ora tutte le cifre del contachilometri passano direttamente dal 3 al 5 (saltando il 4), e dall'8 allo 0 (saltando il 9). All'inizio dell'anno il contachilometri indicava 2007, ora indica 7002. Determinare quanti chilometri ha effettivamente percorso l'auto.

13. Il calcolo sembra impossibile, ma per fortuna i numeri 25 e 8 producono un multiplo di 100. Si deve sperare che si possa ridurre il calcolo a quanti son gli zeri in coda al numero: $25^{3007} \times 8^{2007} = (5^2)^{3007} \times (2^3)^{2007} = (5 \times 2)^{6014} \times 2^7 = 128 \times 10^{6014}$. Il numero 128 seguito da 6014 zeri ha 6017 cifre.

14. Uno smussamento genera tante facce quante quelle presenti prima dello smussamento con l'aggiunta di altrettante quanti i vertici smussati. In ogni vertice, con uno smussamento si generano tre vertici. Perciò basta calcolare la somma del numero dei vertici dall'inizio fino al quinto smussamento insieme con il numero di facce iniziali: $6 + 8 + 8 \times 3 + 8 \times 3^2 + 8 \times 3^3 + 8 \times 3^4 + 8 \times 3^5 = 6 + 8\frac{3^6-1}{2} = 2918$.

15. La somma di tutti i parlamentari positivi nei cinque giorni è $71 + 76 + 80 + 82 + 91 = 400$. Dato che la somma dei primi quattro deve essere divisibile per 4, i parlamentari positivi nel quinto giorno sono un multiplo di 4: 76 o 80. Se questi sono 76, allora i positivi prima del quinto giorno sono $400 - 76 = 324$ che è un multiplo di 3 e i positivi nel quarto giorno devono essere un multiplo di 3, ma nessuno dei numeri 71, 80, 82 e 91 lo è. Quindi i parlamentari positivi nel quinto giorno sono 80 e quelli positivi prima del quinto giorno sono $400 - 80 = 320$. Il numero di positivi prima del quarto giorno deve essere un multiplo di 3 e 320 ha resto 2 nella divisione per 3. Tra 71, 76, 82 e 91, l'unico che ha resto 2 nella divisione per 3 è 71. Il numero di positivi prima del quarto giorno è così $320 - 71 = 249$. Visto che il numero di positivi prima del terzo giorno deve essere divisibile per 2, il numero di positivi del terzo giorno deve essere 91.

16. Se a e b sono i numeri scritti nelle sovrapposizioni dei tre bracci

a		b

, la somma dei totali sui tre bracci in uno schemino è $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + a + b = 28 + a + b$ che deve essere un multiplo di 3. Perciò a e b possono essere 7 e 1 oppure 7 e 4 oppure 6 e 2 oppure 6 e 5 oppure 5 e 3 oppure ancora 4 e 1. Nel primo caso, la somma del totale su ciascun braccio è 12, il numero al centro deve essere 4 e lo schemino si può completare così

3		5
7	4	1
2		6

.
Nel secondo caso, la somma del totale su ciascun braccio è 13, il numero al centro deve essere 2 e lo schemino si può completare così

5		3
7	2	4
1		6

.
Nel terzo caso, la somma del totale su ciascun braccio è 12, il numero al centro deve essere 4, e lo schemino si può completare così

5		7
6	4	2
1		3

. La risposta è dunque 2107.

17. Usando otto cifre invece di dieci, il contachilometri "conta" in base 8 usando le cifre 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 e 8. Convertendo nelle usuali cifre da 0 a 7, i chilometri percorsi sono $6002 - 2006$ in base 8. Il risultato è 3774 in base 8 e la sua conversione in base 10 è $3 \times 8^3 + 7 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 4 \times 8^0 = 2044$.

18. Il ribaltone I Deputati della Repubblica delle Banane erano suddivisi in 200 gruppi parlamentari. Tutti i gruppi avevano un numero diverso di elementi, sempre comunque maggiore od uguale a 7. A seguito di una crisi di governo le cose sono cambiate. Ora alcuni Deputati sono diventati indipendenti (cioè non fanno parte di nessun gruppo), mentre gli altri hanno costituito dei nuovi gruppi parlamentari. Ancora una volta, tutti i gruppi hanno un numero diverso di elementi, sempre comunque maggiore od uguale a 7. Inoltre, come solitamente accade, se 2 Parlamentari erano nello stesso gruppo prima della crisi, ora o sono in gruppi diversi o almeno uno di loro è diventato indipendente. Determinare il minimo numero di parlamentari che sono diventati indipendenti.

19. Ritorno al passato L'unico accordo che i partiti della Repubblica delle Banane hanno trovato per la nuova legge elettorale prevede un drastico ritorno al passato. Vi sarà infatti una sola Camera in cui siederanno i rappresentanti della Nobiltà, del Clero, e del Terzo Stato. Ciascuna delle tre categorie avrà un numero pari di rappresentanti, in modo da favorire la litigiosità interna. I numeri di rappresentanti delle categorie saranno tutti di 3 cifre, e per scriverli si useranno una ed una sola volta le cifre da 1 a 9. Sapendo che i rappresentanti della Nobiltà saranno di più di quelli del Clero, i quali a loro volta saranno di più di quelli del Terzo Stato, determinare quante sono le possibili terne di numeri che rappresentano i componenti delle 3 categorie.

20. Per soli abbonati Ottemperando alle ultime disposizioni in materia, gli ingressi di uno stadio sono stati muniti di tornelli. Un tornello è costituito da 3 sbarre metalliche complanari disposte con i centri coincidenti in modo da formare tra di loro angoli di 60° e da poter ruotare attorno ad un asse verticale passante per il centro comune. Nel momento in cui uno spettatore sta passando attraverso il tornello, il metal detector rivela un oggetto metallico sospetto. La macchina indica che l'oggetto sospetto si trova nel piano delle sbarre e dista, rispettivamente, 36 e 42 centimetri dalle 2 sbarre che delimitano l'angolo di 60° in cui si trova. Determinare, sempre in centimetri, la distanza dell'oggetto dalla terza sbarra (trascurando ovviamente lo spessore dell'oggetto e delle sbarre).

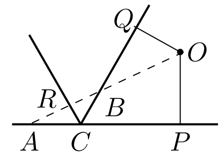
21. Il palio di Bananopolis In epoca antica l'attuale Repubblica delle Banane era governata da sovrani autorevoli. Il fondatore circondò la capitale Bananopolis con possenti mura circolari nelle quali si aprivano 13 porte. Ogni coppia di porte era unita da una strada rettilinea. Tali strade erano dette "vie sacre". La disposizione delle porte faceva sì che in nessun incrocio confluissero 3 o più vie sacre. Dopo la costruzione della città l'oracolo disse che, per ingraziarsi il favore degli dei, ogni anno si sarebbe dovuto correre un palio. La pista su cui correre doveva essere un triangolo i cui lati erano tratti di vie sacre ed i cui vertici non erano in corrispondenza delle porte (intendendo come buoni anche i triangoli attraversati da altre vie sacre oltre a quelle su cui giacciono i lati). Ogni anno, inoltre, il palio si doveva correre su un tracciato diverso: finiti tutti i possibili tracciati, il regno sarebbe crollato. Determinare quanti anni è durato questo antico regno.

22. La serra Una serra protegge nei mesi invernali la coltivazione di banane (a soli fini estetici) nei giardini del Parlamento. La base della serra è un quadrato la cui area misura 450 m^2. Da due lati opposti del quadrato partono 2 facce della serra a forma di triangolo equilatero. I restanti 2 lati del quadrato sono le basi (minori) di 2 trapezi isosceli uguali. Le basi maggiori dei 2 trapezi, lunghe il doppio del lato del quadrato, sono unite in alto a completare la struttura. Determinare, in metri cubi, il volume della serra.

18. I parlamentari sono almeno $7+8+9+\ldots+206$. Dopo il ribaltone, se un gruppo parlamentare ha più di 200 parlamentari, allora sicuramente uno dei gruppi ha due parlamentari che provengono dallo stesso gruppo prima del ribaltone. Dunque ogni gruppo dopo il ribaltone ha al massimo 200 membri. Togliendo 6 parlamentari da ogni gruppo prima del ribaltone, e prendendo gruppi formati in modo trasversale, si formano nuovi gruppi da 200, 199, 198,..., 7 membri. Restano $6\times200+1+2+3+4+5+6 = 1221$ parlamentari indipendenti.

19. Una terna di numeri pari formati da tre cifre richiede di ordinare le cifre da 1 a 9 in modo che al terzo, al sesto e al nono posto ci sia una cifra pari: 4 cifre sono pari, 5 dispari. Ci sono 4 modi per scegliere le tre cifre pari da posizionare al terzo, sesto e nono posto, e sono 3! gli ordini delle cifre pari in quelle tre posizioni. Corrispondentemente, ci sono 6! ordini delle restanti cifre nelle altre posizioni. In totale sono $4\times6!\times3!$ i modi possibili di distribuire le cifre come richiesto, prescindendo dall'ordine crescente. La stessa terna ordinata viene ottenuta da 3! terne non ordinate. Il numero totale è $\frac{4\times6!\times3!}{3!} = 4\times6! = 2880$.

20. L'oggetto sospetto O si trova come nella figura a fianco: C è il centro comune dei tornelli, $OP = 42$cm e $OQ = 36$cm. Il problema richiede di trovare la lunghezza di OR.



I due triangoli rettangoli CBR e ACR sono uguali avendo un lato in comune e ciascuno un angolo di 60°. Inoltre, sia l'angolo $\widehat{QOB}$ che l'angolo $\widehat{POA}$ sono di 60°. Perciò $OR = 2\overline{OQ} + \frac{2\overline{OP}-2\overline{OQ}}{2} = \overline{OP}+\overline{OQ} = 78$cm.

21. Ad ogni triangolo da considerare corrispondono esattamente 3 vie sacre: quelle sui cui giacciono i lati. A queste 3 vie corrispondono esattamente 6 porte distinte, perché non vanno considerati i triangoli che hanno come vertice una porta. Viceversa 6 porte individuano univocamente 3 vie sacre ed un solo triangolo perché in un vertice non possono incrociarsi più di due vie. Il numero di tracciati che ci interessa contare è quindi uguale al modo di scegliere 6 porte distinte tra 13, e questo è $\binom{13}{6} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2} = 1716$.

22. Sia l il lato del quadrato di base. Conviene spezzare il solido congiungendo i vertici del quadrato con il punto medio della base maggiore dei trapezi. In questo modo si ottengono due tetraedri regolari di lato l e una piramide regolare a base quadrata di lato l. Infatti le congiungenti tracciate sono lunghe esattamente l dato che ogni trapezio isoscele è metà di un esagono regolare. Quindi il volume totale pari a $\frac{\sqrt{2}}{6}l^3 + 2\frac{\sqrt{2}}{12}l^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}l^3 = 4500\text{m}^3$.

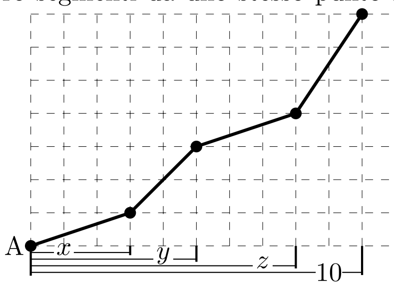
23. Fregatura astrologica Per conoscere la durata del prossimo governo, il Primo Ministro della Repubblica delle Banane ha deciso di rivolgersi ad un astrologo. L'astrologo gli ha chiesto date ed orari di nascita di tutti quelli che lo sostengono, da cui, compilando complesse tabelle, ha ricavato 3 importanti parametri. Ora si appresta ad inserire questi 3 parametri in un nuovo software che dovrebbe fornirgli la durata in giorni del governo. Quello che nessuno sa è che l'ingegnere che ha programmato il software non aveva idea di come tener conto di quei parametri e quindi, per confondere un po' le acque, ha fatto un programma che, ricevuti in input 3 numeri x, y, z, restituisce in output la parte intera di

$$\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+4}+\sqrt{(z-y)^2+1}+\sqrt{(10-z)^2+9}\right)^2.$$

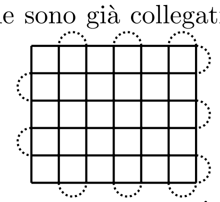
Sapendo che i 3 parametri calcolati dall'astrologo possono essere numeri reali qualunque, determinare quanti giorni durerà, come minimo, il nuovo governo.

24. La ronda Per mantenere la disciplina tra i principali esponenti dei partiti che a parole lo sostengono, il Primo Ministro della Repubblica delle Banane ha deciso di sistemarli in una tendopoli. Questo ha comportato la costruzione di un enorme accampamento suddiviso da delle stradine in un reticolo di 64×37 quadrati tutti uguali, all'interno di ognuno dei quali c'è una tenda. Ogni notte, per evitare congiure, il Primo Ministro parte da un vertice dell'accampamento e, dopo aver percorso almeno una volta tutte le stradine interne e perimetrali, ritorna al vertice di partenza. Determinare quanto è lunga, come minimo, la ronda del Primo Ministro (esprimere la risposta assumendo come unità di misura la lunghezza del lato dei quadrati del reticolo).

23. Per ottenere la soluzione è necessario una manipolazione simbolica della formula: si deve associare ogni radice quadrata ad un'applicazione del teorema di Pitagora per calcolare la lunghezza dell'ipotenusa di un opportuno triangolo rettangolo. Il primo ha cateti lunghi x e 1, il secondo ha cateti lunghi $y-x$ e 2, quelli del terzo sono lunghi $z-y$ e 1, per il quarto sono $10-z$ e 3. Le tre differenze $y-x$, $z-y$ e $10-z$ fanno pensare di spiccare quattro segmenti da uno stesso punto A su una stessa retta, lunghi rispettivamente x, y, z e 10 unità di lunghezza. Si consideri così la figura dove sono state marcate le quattro ipotenuse coinvolte nel calcolo. A questo punto, è chiaro che la somma delle lunghezze delle quattro ipotenuse è minima quando sono allineate; in quel caso si sommano a dare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con cateti lunghi 10 e $1+2+1+3=7$ e il quadrato della somma delle lunghezze delle quattro ipotenuse vale dunque $10^2+7^2=149$.



24. Sia ℓ il lato di uno qualunque dei quadrati. Essendo i quadrati disposti in 64 file e 37 colonne, il reticolo di stradine formato da 65 stradine orizzontali, che costeggiano le 64 file orizzontali, ciascuna lunga 37ℓ, e 38 verticali, ciascuna lunga 64ℓ, che racchiudono le 37 file verticali. La lunghezza totale del reticolo è dunque di $65 \times 37\ell + 64 \times 38\ell = 4837\ell$. Non esistono percorsi soddisfacenti le condizioni richieste che siano di tale lunghezza: infatti, essendo il percorso una linea chiusa, in ogni nodo devono confluire un numero pari di stradine (per ogni stradina di "arrivo" nel nodo, deve essercene una di "partenza"). Nei nodi dei quadrati diramano due o quattro stradine, esclusi quei nodi che stanno sul perimetro e che non sono un vertice dell'accampamento; da questi nodi si diramano tre stradine. Di conseguenza almeno una delle tre dovrà essere percorsa due volte. Ora si deve notare che, ripercorrendo una stradina per "uscire" da un nodo, si ottiene un ulteriore "ingresso" in un altro nodo. Dato che i nodi con numero dispari di stradine sono già collegati, si può cercare di "aggiungere stradine" in modo minimo per ottenere un numero pari di stradine confluenti in ogni nodo, ad esempio nella configurazione a fianco (dove si sono ridotte le dimensioni) le stradine aggiunte sono punteggiate e disegnate arcuate per indicare che si deve passare su ciascuna di quelle (cioè passare *due volte* sulla stradina non tratteggiata). Dunque, la minima lunghezza per coprire il reticolo entrando e uscendo da ogni nodo in totale un numero pari di volte è *almeno* uguale alla lunghezza totale del reticolo aumentata del semiperimetro, cioè $4837+64+37=4938$.



Per accertarsi che questo minimo sia ottenibile con un effettivo percorso, vi sono molte soluzioni; ne proponiamo una schematicamente