2006 Coppa Fermat

Coppa Fermat

Genova, 24 marzo 2006

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale α è il più grande intero minore od uguale ad α.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{6} = 2,4495$ $\pi = 3,1416$.

1. Il tagliere Per ospitare i concorrenti di questa gara a squadre, gli organizzatori hanno fatto costruire un villaggio olimpico, nel cui ristorante si mangia dell'ottima pizza al tagliere. Un tagliere è una grande pizza suddivisa in 8 fette uguali. Un tagliere di "margherita" costa 8 euro; pagando altri 2 euro è possibile fare aggiungere delle acciughe su mezzo tagliere, e pagando 3 euro è possibile fare aggiungere dei funghi, sempre su mezzo tagliere. Tre amici vanno nel locale e ordinano 2 taglieri, uno tutto "margherita" ed uno metà ai funghi e metà con le acciughe. Il primo amico mangia 3/4 della parte ai funghi e 1/4 del tagliere "margherita", il secondo metà della parte alle acciughe e 3 fette di "margherita", il terzo mangia ciò che rimane. Alla fine, scrupolosissimi, ognuno paga per quello che ha mangiato. Determinare, in centesimi di euro, la differenza tra la cifra pagata da chi ha speso di più e quella pagata da chi ha speso di meno.

1. Le due pizze costano $2 \times 8 + 2 + 3 = 21$€. Un ottavo di pizza margherita costa 1.00€, un ottavo di pizza con le acciughe 1.50€, un ottavo di pizza con i funghi 1.75€. Il primo spende $3 \times 1.75 + 2 \times 1.00 = 7.25$€; il secondo $2 \times 1.50 + 3 \times 1.00 = 6.00$€; il terzo $21.00 - (6.00 + 7.25) = 7.75$€. La differenza è 1.75€.

2. La gestione del campione Stefano gioca in una squadra di calcio che partecipa ad un campionato a 20 squadre, in cui ogni formazione incontra ciascuna delle rimanenti 2 volte, una in casa ed una in trasferta. Dalle analisi tecniche risulta che in ogni partita Stefano corre in media per 10 km, uniformemente distribuiti durante lo svolgimento della gara. Per gestire lo sforzo, l'allenatore ha deciso che Stefano giocherà per intero i 2 derby e tutte le altre partite in casa, mentre giocherà il solo primo tempo in tutte le altre partite in trasferta. Determinare quanti km correrà Stefano durante l'intero campionato.

2. Ogni squadra fa $2 \times 19 = 38$ partite, perciò quella di Stefano fa 2 derby, 18 partite in casa e 18 trasferte. Stefano corre così per $10 \times (2 + 18) + 5 \times 18 = 200 + 90 = 290$km.

3. La fiaccola Gli organizzatori di questa gara hanno fatto le cose in grande, facendo venire fin qui la fiaccola olimpica. L'ultimo tedoforo è giunto nella sede della gara oggi, 24 marzo 2006, alle ore 10:30, ma la fiaccola era stata accesa ad Olimpia esattamente 2006 ore prima. Determinare in che giorno è stata accesa la fiaccola.
Nella risposta utilizzare le 2 cifre a sinistra per indicare il numero del giorno e le 2 cifre a destra per indicare il mese (ad esempio scrivere 0702 per indicare il 7 febbraio).

3. $2006 = 83 \times 24 + 14$, quindi 2006 ore sono 83 giorni e 14 ore. 83 giorni prima del 24 marzo 2006 era il 31 dicembre 2005, 14 ore prima delle 10:30 era il 30 dicembre alle 20:30.

4. Phishing Alcuni malintenzionati vorrebbero intercettare la combinazione della cassaforte che contiene le medaglie olimpiche, costituita da una successione di 6 cifre. Il sistema da loro escogitato dovrebbe far sì che, quando un addetto digita una cifra della combinazione, questa appaia immediatamente sul display dei ladri. Purtroppo per loro, il sistema non funziona ancora bene, nel senso che funziona perfettamente quando vengono premute le cifre 2, 6, 0, ma quando vengono usate le altre cifre sul display non compare nulla. L'ultima volta che gli addetti hanno aperto la cassaforte, sul display dei malintenzionati sono apparse nell'ordine solo le 4 cifre `2006`. Determinare *quante* sono le possibili combinazioni che i malintenzionati dovrebbero provare per essere sicuri di aprire la cassaforte.

5. The guardian La fiaccola olimpica arde in un piazzale a forma di triangolo rettangolo isoscele, i cui lati minori sono lunghi 80 metri. Un ferocissimo cane è incaricato della sorveglianza. Per permettere agli spettatori di guardare la fiaccola più da vicino, gli organizzatori hanno pensato di limitare i movimenti del cane ponendogli ben 2 guinzagli, lunghi però 80 metri ciascuno, e fissati ai 2 estremi del lato più lungo della piazzale. Determinare quanti metri quadrati del piazzale sono sotto il controllo del cane.

6. L'esposizione In una scuola un'intera stanza è stata attrezzata per esporre i trofei conquistati nelle varie edizioni di questa gara. Per proteggere il prezioso pavimento dall'usura dovuta alle migliaia di visitatori, la stanza, di forma quadrata, è stata arredata disponendo 4 tappeti rettangolari uguali, senza creare sovrapposizioni, in modo da formare un camminamento che corre lungo tutto il perimetro, lasciando scoperto solo un quadrato al centro della stanza stessa. Sapendo che il perimetro di ogni tappeto è di 9 metri, determinare quanti *decimetri quadrati* misura l'area della stanza.

7. Doping Nei giorni scorsi un blitz dei Carabinieri nelle sedi dei Licei Alfieri, Boccaccio e Carducci ha voluto accertare l'esistenza di casi di doping tra i concorrenti delle gare a squadre. Nonostante lo stretto riserbo degli inquirenti, ben 5 notizie sono apparse sulla stampa.

1. Nessuna squadra è dopata.
2. La squadra del Boccaccio è dopata.
3. Una sola delle 3 squadre è dopata.
4. Almeno una squadra tra Alfieri e Carducci è pulita (cioè non dopata).
5. Ci sono almeno 2 squadre dopate.

Oggi, pressati dai mass media, gli inquirenti hanno dichiarato che una ed una sola delle notizie trapelate è esatta. Determinare come stanno le cose.

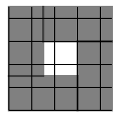
Comporre la risposta in questo modo: nella prima posizione da sinistra si indichi il numero dell'affermazione corretta; nella seconda posizione si indichi `0` se la squadra del Liceo Alfieri è pulita, `1` se è dopata, `2` se le informazioni non sono sufficienti per stabilirlo; nella terza e quarta posizione si indichi la stessa cosa relativa ai Licei Boccaccio e Carducci, rispettivamente.

8. La defenestrazione In un bagno del villaggio olimpico gli organizzatori vorrebbero sostituire uno specchio rettangolare le cui misure sono 109×156 centimetri (lo spessore è trascurabile). Per ragioni tecniche, sarebbe opportuno far uscire lo specchio dal finestrino del bagno, di forma rettangolare, ma largo soltanto 60 centimetri. Determinare, in millimetri, la minima altezza che deve avere il finestrino affinché lo specchio possa uscire (intero).

4. Poiché i ladri hanno scoperto 4 delle 6 cifre, ne restano 2 tra le 7 cifre 1,3,4,5,7,8,9—se fossero altre cifre, sarebbero comparse sul display. In ciascuna posizione ci sono 7 possibili scelte, le configurazioni possibili sono poi determinate come segue: fissate quante cifre tra le 4 nella sequenza `2006` vanno prima della prima della prima cifra indeterminata, bisogna fissare quante delle rimanenti vanno dopo la seconda cifra; infatti quelle tra le due posizioni sono necessariamente determinate. Se quelle prima della prima cifra sono 0, allora ci sono 5 possibilità per fissare quelle dopo la seconda; se quelle prima della prima cifra sono 1, allora ci sono 4 possibilità per quelle dopo la seconda; e così di seguito. In totale, le possibili sequenze sono $7 \times 7 \times [5+4+3+2+1] = 735$.

5. Il cane arriva a 80 metri da ogni vertice dell'ipotenusa della piazza, quindi la zona che controlla è l'intersezione dei due archi di circonferenza di raggio 80 metri con centro nei vertici dell'ipotenusa, cioè metà dell'intersezione delle due circoferenze, che è lo stesso che l'area del segmento circolare di ampiezza 90° e raggio 80m. Perciò è $\frac{\pi 80^2}{4} - \frac{80^2}{2} = (\pi - 2)40^2 = 1826,55$. La risposta è 1826.

6. Si noti che c'è un dato in eccesso nel problema: la stanza da esposizione è *necessariamente* quadrata dato che l'unica disposizione dei quattro tappeti rettangolari uguali che lascia un quadrato scoperto al centro è quella a fianco. Il lato della stanza è uguale al semiperimetro di un tappeto. L'area è $\left(\frac{9\text{m}}{2}\right)^2 = 45\text{dm}^2 = 2025\text{dm}^2$.



7. Se 1. è esatta oppure 3. è esatta, allora anche 4. è esatta. Dunque, sia 1. che 3. sono errate: perciò almeno 2 squadre sono dopate, cioè 5. è la frase esatta. Ne segue che 2. e 4. sono errate. La risposta è perciò 5101.

8. Per far passare lo specchio dal finestrino rettangolare, è sufficiente che la diagonale del rettangolo sia di 109cm. L'altezza della finestra deve essere almeno $\sqrt{109^2 - 60^2} = 91$cm.

9. Il piccolo Sudoku Il piccolo Sudoku è il parente povero del Sudoku classico: si gioca su una tabella 4×4, a sua volta suddivisa in quattro piccole tabelle 2×2: ciascuna delle 16 caselle della tabella contiene una cifra (scelta tra 1, 2, 3, 4), in modo che nessuna delle 4 righe, delle 4 colonne, e delle 4 tabelle 2×2 contenga più di una volta la stessa cifra. Un piccolo Sudoku è stato iniziato ponendo le cifre 1, 2, 3, nell'ordine, nelle prime 3 caselle della diagonale principale (quella che parte in alto a sinistra e finisce in basso a destra). Determinare tutti i modi di completarlo.

Comporre la risposta in questo modo: nella prima posizione da sinistra si indichi il numero di modi di completarlo; nelle 3 caselle successive si indichi il numero di 3 cifre che nelle soluzioni compare il maggior numero di volte nella prima riga dopo la cifra 1 già presente all'inizio.

9. Nel piccolo sudoku impostato, il 3 può in posizione segnata con x oppure in posizione y

1	x		
y	2		
		3	

. Se è in posizione x, il sudoku si completa fino a

1	3	z	
4	2	1	3
2		3	
3			

. Se la posizione z è 2, il sudoku si completa con

1	3	2	4
4	2	1	3
2	4	3	1
3	1	4	2

. Se la posizione z è 4, il sudoku si completa a

1	3	4	2
4	2	1	3
2		3	
3		2	

con due completamenti possibili. Si noti che il numero nella prima colonna è sempre 1423. Simmetricamente, ci sono altre tre soluzioni se 3 è in posizione y con il numero 1423 fisso in prima riga. La risposta è 6423.

10. Il medagliere Alle ultime Olimpiadi Invernali per matematici si sono svolte 30 gare. In 29 di queste sono state assegnate una medaglia d'oro, una d'argento ed una di bronzo; nella rimanente sono state assegnate una medaglia d'oro, una d'argento e 2 di bronzo, per l'impossibilità di distinguere tra il terzo ed il quarto. Alla fine nessuna nazione ha vinto 6 o più medaglie d'oro. L'Italia ha conquistato 4 ori, 6 argenti e 4 bronzi, ma purtroppo nel medagliere, nel quale non ci sono squadre a pari merito, è arrivata ultima, ovviamente tra i paesi che hanno conquistato almeno una medaglia (si ricorda che la classifica del medagliere viene fatta sulla base del numero di ori conquistati; a parità di ori si guardano gli argenti ed in caso di ulteriore parità i bronzi). Determinare quante squadre hanno vinto almeno una medaglia e quante medaglie ha vinto la squadra prima classificata.

Comporre la risposta in questo modo: nella prima posizione da sinistra si indichi il numero di squadre che hanno vinto almeno una medaglia; nelle 3 caselle successive si indichi, nell'ordine, il numero di ori, argenti e bronzi conquistati dalla squadra prima classificata.

10. Poiché l'Italia è ultima con 4 ori, le altre nazioni devono aver conquistato 4 o 5 ori. In totale, sono state assegnate 30 medaglie d'oro, quindi le altre nazioni hanno vinto 26 medaglie d'oro. L'unico modo per ottenere 26 come somma di multipli positivi di 4 e di 5 è $2 \times 5 + 4 \times 4$. Le squadre che hanno vinto almeno una medaglia sono 7, inclusa l'Italia. Le 4 squadre che hanno vinto 4 ori, devono avere vinto almeno almeno 6 dei 24 argenti disponibili, ma $6 \times 4 = 24$; perciò tutti gli argenti sono stati vinti dall'Italia e dalle altre 4 nazioni con 4 ori. Le due nazioni che hanno vinto 5 ori non hanno vinto argenti; dunque, la prima classificata ha vinto una medaglia di bronzo in più rispetto alla seconda. Infine, le 5 squadre con 4 ori sono ordinate rispetto alle medaglie di bronzo: l'Italia ne ha vinte 4, la penultima almeno 5, la terzultima almeno 6, poi 7 e 8. In totale, sono 30 medaglie di bronzo. La soluzione minima è anche l'unica possibile. La risposta è 7501.

11. Crescita matematica Un botanico la notte dell'ultimo Capodanno ha piantato al villaggio olimpico un seme di una pianta sconosciuta. Analizzando fino ad ora la crescita dello stelo il botanico ha rilevato che

- è cresciuto di 3 millimetri il terzo giorno, il sesto, il nono e così via nei giorni multipli di 3 dalla semina;
- è cresciuto di 2 millimetri il secondo giorno, il quarto, l'ottavo e così via nei giorni pari, ma non multipli di 3 dalla semina;
- è cresciuto di 1 millimetro negli altri giorni.

Determinare, se le cose continuano allo stesso modo, quanti millimetri sarà alto lo stelo nella notte del prossimo Capodanno.

11. Lo schema si ripete regolarmente ogni sei giorni; in un tale periodo, la pianta cresce di $1+2+3+2+1+3 = 12$mm. Dato che $365 = 6 \times 60 + 5$, la pianta è cresciuta di $12 \times 60 + 9 = 729$mm.

12. Ubriaconi Tutte le bottiglie di vino servite al ristorante del villaggio olimpico hanno come prezzo un numero intero di euro che si scrive usando solo cifre 8 (alcune sono in effetti molto care, ma pare che meritino). Al termine della sua permanenza al villaggio, una squadra presenta ai propri finanziatori una ricevuta con ben 70000 (settantamila) euro di vino. Sulla ricevuta sono indicate una per una tutte le bottiglie consumate, con i relativi prezzi. Determinare il minimo numero di cifre 8 che compaiono nella ricevuta.

12. Dato $70000 = 8 \times 8750$, basta determinare il minimo numero di cifre 1 che compaiono in una somma di 8750. Si calcola

$$\begin{aligned} 8750 &= 7 \times 1111 + 973 = 7 \times 1111 + 8 \times 111 + 85 \\ &= 7 \times 1111 + 8 \times 111 + 7 \times 11 + 8 \times 1. \end{aligned}$$

Il minimo numero di cifre 8 in una somma come richiesta è $7 \times 4 + 8 \times 3 + 7 \times 2 + 8 = 74$.

13. Il primo laghetto Un grande parco circonda il villaggio olimpico. Due lati del parco sono delimitati da 2 strade rettilinee che formano tra di loro un angolo di 56°. Nel parco c'è poi un laghetto circolare, tangente alle due strade. Una terza strada, tangente anch'essa al lago, incontra le 2 strade precedenti in due incroci, in cui in questo momento si trovano Andrea e Luca. Le 3 strade descritte delimitano un triangolo che non contiene il laghetto. Determinare il massimo ed il minimo valore possibile per l'ampiezza in gradi dell'angolo con vertice nel centro del lago ed i cui lati passano, rispettivamente, per Andrea e Luca.

Trascurare lo spessore delle strade e degli incroci. Nella risposta utilizzare le 2 cifre a sinistra per indicare il massimo e le restanti 2 per indicare il minimo.

13. Siano P il punto di incontro delle 2 strade, O il centro della circonferenza del laghetto, H e K i punti di tangenza tra una strada e il laghetto, A e L i punti dove si trovano Andrea e Luca, su OH e OK rispettivamente. Le rette OA e OL sono le bisettrici degli angoli $\widehat{HOP}$ e $\widehat{KOP}$, rispettivamente. Perciò l'angolo $\widehat{AOL}$ è metà dell'angolo $\widehat{HOK}$. Dunque, *qualunque* sia la posizione della strada AL, l'angolo $\widehat{AOL}$ ha sempre la stessa ampiezza; così i suoi valori massimo e minimo coincidono. L'angolo $\widehat{HOK}$ è supplementare all'angolo $\widehat{HPK}$, così $\widehat{AOL} = \frac{180°-56°}{2} = 62°$.

14. Il gioco dell'oca Due amici vogliono costruire un grande Gioco dell'Oca su un cartellone quadrettato. Come ci si potrebbe immaginare, la pista è costituita da una successione di caselle quadrate messe in modo che 2 caselle consecutive hanno un lato in comune, mentre 2 caselle non consecutive non hanno nemmeno un punto in comune. La pista inizia dalla casella in alto a sinistra, poi procede percorrendo il lato superiore, poi il lato di destra, quello inferiore, quindi risale il lato di sinistra fino alla terzultima casella per poi procedere all'interno spiraleggiando in senso orario fino a che rimangono caselle disponibili. Ad esempio, se il rettangolo iniziale fosse 8×10 (8 righe, 10 colonne), la pista terminerebbe nella casella posta nella riga 5, colonna 3. Determinare in quale riga ed in quale colonna termina la pista tracciata in un rettangolo 80×100.

Nella risposta usare le 2 cifre a sinistra per indicare la riga e le restanti 2 per indicare la colonna.

14. Per facilitare l'esposizione, chiamiamo "cornice" un tratto di percorso formato da quattro segmenti consecutivi, dei quali il primo va da sinistra a destra, il secondo dall'alto in basso, il terzo da destra a sinistra e l'ultimo dal basso verso l'alto, scelti in modo che il primo e l'ultimo abbiano la massima lunghezza possibile (i due tratti centrali hanno lunghezza obbligata dal vincolo di essere consecutivi). Notiamo che la prima cornice coinvolge prima e ultima riga e prima e ultima colonna, la seconda cornice terza e terzultima riga e terza e terzultima colonna, e così via: l'n-esima cornice coinvolge la $2n-1$-esima riga e la $80-(2n-2)$-esima riga. In questo modo, ogni cornice è in qualche modo "concentrica" alla precedente. Esclusa la prima cornice, per la quale si ha l'ultimo tratto percorso sulla stessa colonna nella quale giace la prima casella del primo tratto, ognuna delle successive avrà l'ultimo tratto sulla colonna nella quale giace la terza casella del primo tratto. Essendo costante la distanza tra tratti corrispondenti di cornici vicine, ed essendo all'inizio le righe più lunghe delle colonne, questa proprietà si manterrà per ogni cornice successiva; ogni cornice infatti, si sviluppa su un'area che richiede 4 righe e 4 colonne in meno della precedente. Di conseguenza, essendo il numero totale di righe inferiore a quello delle colonne, lo spazio a disposizione finirà quando avremo esaurito le righe a disposizione. La ventesima cornice ha il primo tratto sulla riga 39 e il terzo sulla riga 42. La ventunesima cornice non può essere tracciata: il primo tratto si svolgerebbe sulla riga 41, ma a contatto con la riga 42 usata per il terzo tratto della cornice precedente. Di conseguenza, l'ultima casella del gioco si troverà su una casella del quarto tratto della ventesima cornice. Tale tratto si compie sulla 39-esima colonna e congiunge la riga 42 con la 41. Non potendo iniziare la cornice successiva, il percorso termina sulla riga 41 e colonna 39; nell notazione richiesta, la soluzione è 4139.

15. L'equazione Tutto preso dalla gara a squadre, un concorrente si è dimenticato di appuntarsi i compiti per casa. Ricorda vagamente che doveva risolvere un'equazione del tipo

$$x^9 - \ldots x + 3 = 0,$$

però non riesce assolutamente a farsi tornare in mente il coefficiente di x proposto dall'insegnante. Si ricorda solo che era un multiplo positivo di 10 e sa che l'equazione deve avere almeno una soluzione intera, visto che proprio quello è stato l'argomento delle ultime lezioni. Determinare il coefficiente dimenticato.

15. Siano $10a$ il coefficiente di x e r una soluzione intera dell'equazione. Allora $3 = 10a \cdot r - r^9 = r(10a - r^8)$. Dunque la soluzione r è 1, -1, 3 oppure -3. Se r è 1 oppure -1, allora $10a - r^8 > 9$ non può essere 3. Se r è 3 oppure -3, allora $10a - r^8 = 10a - 6561$ è 1 per $a = 656$. La soluzione è -3 e il coeffiente è 6560.

16. Indicazioni enigmatiche Valentina è rimasta nella sua camera al villaggio olimpico, situata ad esattamente 1 km dalla fiaccola olimpica. Guglielmo la chiama in camera con il suo cellulare e, per mostrare la potenza del suo palmare con GPS, le dice: "Ora la mia distanza dalla fiaccola, espressa in km, è il quadrato della distanza tra noi due, sempre in km". Determinare, in metri, la differenza tra la massima e la minima distanza che ci può essere tra Guglielmo e Valentina.

16. Sia x la distanza tra Guglielmo e Valentina, così la distanza tra Guglielmo e la fiaccola è x^2. Per formare un triangolo, queste devono verificare le condizioni che $x + x^2 \geq 1$, $x + 1 \geq x^2$, $x^2 + 1 \geq x$. La terza condizione è sempre verificata—il quadrato di un numero maggiore di 1 è maggiore del numero stesso, inoltre la sua somma con 1 è sempre maggiore di 1. Dunque x è compreso tra $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. La loro differenza è 1.

17. L'isola dei disonesti
I 5 concorrenti di un noto reality sono naufragati su di un'isola. Per procurarsi del cibo, iniziano accumulando in un mucchio tutte le noci di cocco che riescono a raccogliere. Durante la notte uno dei concorrenti decide di prendersi anticipatemente la sua parte: divide allora le noci in 5 mucchi uguali, scopre che ne avanza una e la getta alle scimmie, poi nasconde la sua parte e torna a dormire. Dopo un po' si sveglia il secondo concorrente con la stessa idea: divide le noci rimaste in 5 mucchi, scopre che ne avanza una e la getta alle scimmie, poi nasconde la sua parte e torna a dormire. Nel seguito della notte, si svegliano in successione anche i restanti 3 concorrenti, tutti con la stessa idea, e tutti, nel realizzarla, gettano una noce alle scimmie perché avanza nella divisione. La mattina successiva i concorrenti, con aria innocente, dividono le noci rimaste in 5 mucchi uguali, e così facendo non ne avanza nessuna. Determinare quante noci facevano parte, come minimo, del mucchio originario.

17. Siano c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 le quantità di noci di cocco dalla mucchio raccolto fino al mucchio trovato la mattina. Si noti che, dopo ogni operazione, il numero di noci di cocco $c_{n+1} = \frac{4}{5}(c_n - 1)$. Conviene ricondursi a una progressione geometrica—in cui è facile determinare ogni termine in funzione del primo—, procedendo come segue: si modifichi la successione c_n sommando un numero t generico $b_n = c_n + t$, e si ricalcoli l'operazione $b_{n+1} = \frac{4}{5}(c_n - 1 + \frac{5}{4}t)$. Se $t = -1 + \frac{5}{4}t$, cioè $t = 4$, allora si ha $b_{n+1} = \frac{4}{5}b_n$. In particolare, $b_5 = \frac{4^5}{5^5}b_1$. Perché b_5 sia intero, b_1 deve essere almeno 5^5, per cui il minimo numero di noci di cocco richiesto dal problema è $c_1 = b_1 - 4 = 3121$.

18. I Giochi dell'Otto Dopo oltre 3 secoli si svolgeranno quest'anno i Giochi dell'Otto, famosissima gara matematica che si disputa solo negli anni la cui somma delle cifre vale 8, come appunto il 2006. Questa tradizione deriva dal fatto che la prima edizione si è svolta proprio nell'anno 8 D.C. Determinare in quale anno si è svolta o si svolgerà la 88-esima edizione.

18. I numeri fra 1 e 99 che hanno 8 come somma delle loro cifre sono formati da due cifre c e $8 - c$: sono 9; quelli tra 100 e 199 sono formati da due cifre c e $7 - c$: sono 8; e così via fina a 999. In totale sono $9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 45$. In modo simile si calcola che, dal 1000 al 1999, ce ne sono $8+7+6+5+4+3+2+1+0+0 = 36$. L'edizione del 2006 è l'82-esima. In effetti, dal 2000 al 2099 ci saranno 6 edizioni: l'88-esima sarà l'ultima di queste, nel 2060.

19. Il secondo laghetto Nel parco del villaggio olimpico, oltre a quello circolare, c'è anche un laghetto a forma di triangolo rettangolo. Uno dei 2 cateti è lungo 35 metri, e anche gli altri 2 lati hanno per lunghezza un numero intero di metri. Determinare, in metri, la somma del massimo e del minimo perimetro che può avere il lago.

19. Siano a e b le lunghezze dell'ipotenusa e dell'altro cateto. Allora $a^2 = 35^2 + b^2$ e $(a-b)(a+b) = 5^2 \times 7^2$. Dato che a, b e 35 sono lati di un triangolo, è $a + b > 35$; così $a + b$ può essere $49, 175, 245, 1225$, e corrispondentemente $a - b$ è $d = 25, 7, 5, 1$, così a è $b + d$. sostituendo nella uguaglianza tra i quadrati, si ricava che $b^2 + 2db + d^2 = 35^2 + b^2$ e $b = \frac{(35+d)(35-d)}{2d}$. Dato che ogni fattore a denominatore divide ciascuno dei fattori a numeratore, si ottengono valori interi per ognuno dei quattro valori possibili di d. Il perimetro del triangolo è $35 + (a + b)$. I valori massimo e minimo sono $35 + 1225$ e $35 + 49$, la loro somma è 1344.

20. Bowling 1 Nel Bowling del villaggio olimpico c'è la necessità di ammassare un certo numero di palle (perfettamente sferiche). Dapprima gli addetti provano con 4 palle ed immediatamente scoprono che possono metterne 3 sul piano di terra, a 2 a 2 tangenti, e poi disporre la quarta sopra, in modo che sia tangente alle prime 3. Provando ancora un po' scoprono che possono disporre 6 palle a terra "a triangolo", e sopra queste porre la struttura precedente, costruendo così una "piramide a 3 strati" contenente 10 palle. Capiscono a questo punto che la struttura si può allargare ed innalzare a piacere allo stesso modo. Determinare quante palle ci stanno in una "piramide a 25 strati".

20. Ogni strato consiste di un triangolo equilatero di palle, il cui lato aumenta di 1 passando al livello inferiore. Il numero di palle in un triangolo equilatero con n palle su un lato è $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1) = \binom{n+1}{2}$. Il numero di palle in una piramide di m strati ci sono $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{m+1}{2} = \binom{m+2}{3}$, grazie alla proprietà del triangolo di Tartaglia. Il numero totale di palle è: $\binom{25+2}{3} = \frac{27\times 26\times 25}{3\times 2} = 2925$.

21. Il baratto Due allevatori hanno convenuto che un maiale vale 560 euro ed una pecora ne vale 390. Poiché entrambi dispongono di tante pecore e tanti maiali, ma niente denaro contante, hanno deciso di usare gli animali come moneta di scambio. Ad esempio, se il primo deve al secondo 50 euro, lo paga con 3 pecore e si fa dare come resto 2 maiali, saldando così il debito con il passaggio di mano di 5 animali. Determinare il minimo numero di animali che devono passare di proprietà (pagamento più resto) per saldare un debito di 20 euro.

21. Indicando con p il numero di pecore e con m il numero di maiali da scambiare (uno dei due di valore negativo), i possibili scambi di animali per ottenere 20 euro verificano la condizione $56p + 39m = 2$. L'equazione ha infinite soluzioni intere dato che 56 e 39 sono primi fra loro e queste si calcolano mediante l'algoritmo euclideo: prima la successione dei resti $56 = 1 \times 39 + 17$, $39 = 2 \times 17 + 5$, $17 = 3 \times 5 + 2$; non serve continuare per produrre la riscrittura di 2

$$\begin{aligned} 2 &= 17 - 3 \times 5 = 17 - 3 \times (39 - 2 \times 17) \\ &= 7 \times 17 - 3 \times 39 = 7 \times (56 - 1 \times 39) - 3 \times 39 \\ &= 7 \times 56 - 10 \times 39 \end{aligned}$$

Le altre soluzioni si ottengono aggiungendo ai due numeri trovati multipli di 39 e 56 rispettivamente, ottenuti con lo stesso fattore. Questi sono perciò la soluzione minima. Per saldare un debito di 20 euro, si devono pagare 7 pecore e si devono ricevere 10 maiali, in totale 17 animali.

22. Bowling 2 Dopo un po' di tempo gli addetti al Bowling di un problema precedente sono finalmente riusciti a costruire una piramide di palle a 25 strati. Supponendo che il raggio di ciascuna palla sia di 10 centimetri, determinare quanti millimetri misura l'altezza della piramide, cioè la distanza da terra fino alla sommità della palla più alta.

23. Il sorpasso Ad una gara di speedway hanno partecipato 2 moto, le quali hanno dovuto percorrere 199 giri di una pista ghiacciata. La prima moto ha tenuto per tutta la gara un'andatura costante di 100 km/h. La seconda moto ha avuto un'andatura altalenante: ha infatti percorso il primo giro alla velocità costante di 101 km/h, il secondo giro alla velocità costante di 99 km/h, il terzo nuovamente a 101 km/h, e così via, percorrendo sempre i giri pari alla velocità di 99 km/h ed i giri dispari alla velocità di 101 km/h. All'inizio le 2 moto sono partite appaiate dalla linea di partenza. Determinare chi ha vinto e quanti sorpassi ci sono stati nel corso della gara (senza contare quello in partenza).

Nella risposta usare le cifra di sinistra per indicare la moto vincitrice e le restanti 3, con eventuali zeri, per indicare il numero dei sorpassi (ad esempio la risposta 2031 vuol dire che ha vinto la seconda moto e ci sono stati 31 sorpassi durante la gara).

24. Consigli per gli acquisti Una moderna struttura pubblicitaria è costituita da un prisma retto la cui base è un esagono regolare di 1 metro di lato. Il prisma ruota a velocità costante intorno al suo asse, mostrando così alternativamente le 6 facce laterali su cui ci sono dei cartelloni pubblicitari. Michela, rimasta per un certo tempo ferma di fronte alla struttura, ha notato che dal suo punto di osservazione per metà del tempo si vedono contemporaneamente 3 cartelloni (ovviamente sotto angolazioni variabili) e per metà del tempo se ne vedono solo 2. Determinare, in centimetri, la distanza di Michela dall'asse di rotazione.

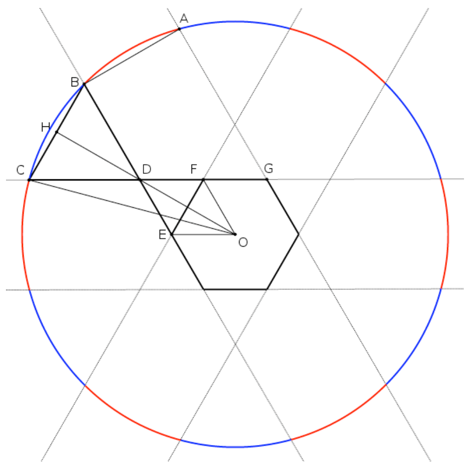
22. Si noti che, in una piramide a due strati (3 sfere nella base inferiore, 1 sfera nel secondo strato in alto), unendo i quattro centri delle sfere si ottiene un tetraedro di lato $l = 2r$. L'altezza di tale tetraedro è $\frac{\sqrt{6}}{3}l$ e misura la distanza tra i piani dei centri di sfere di due livelli successivi.

L'altezza totale della piramide di 25 strati è dunque la somma di 24 altezze di tetraedri costruiti come in precedenza e di due raggi: misura $(24\frac{\sqrt{6}}{3} + 1)2 \times 100\text{mm} = 4119\text{mm}$.

23. Sia r la lunghezza del giro di pista in km. La prima moto termina la gara nel tempo di $\frac{199}{100}r$ ore; la seconda nel tempo di $(\frac{99}{99} + \frac{100}{101})r = (1 + \frac{100}{101})r$. Vince la prima moto dato che $\frac{199}{100} = 2 - \frac{1}{100} < 2 - \frac{1}{101} = 1 + \frac{100}{101}$.

Nel primo giro è in testa la seconda moto; dato che vince la prima moto, ci saranno sorpassi. Ce ne saranno fino a quando la seconda moto non riesce più a sorpassare la prima moto, che rimane in testa fino a fine gara. Chiaramente, la seconda moto supera la prima in giri pari; per trovare quanti sorpassi sono avvenuti, basta trovare il primo giro dispari $2k + 1$ in cui la seconda moto non raggiunge più la prima. La prima moto percorre $2k + 1$ giri nel tempo $\frac{2k+1}{100}$; la seconda moto impiega $\frac{k+1}{101} + \frac{k}{99}$ Il tempo impiegato dalla prima moto è minore di quello impiegato dalla seconda esattamente quando $\frac{19998k+9999}{999900} < \frac{20000k+9900}{999900}$, cioè $k > 49$. Quindi ci sono stati 99 sorpassi e la risposta è 1099.

24. Possiamo ridurre il problema ad uno a due dimensioni gurdando la scena dall'alto: il cartellone è un esagono regolare e Michela un punto del piano. Conviene rovesciare la situazione e considerare l'esagono fermo e Michela in movimento circolare a velocità costante su una circonferenza con centro nel centro dell'esagono. La richiesta del problema è esattamente la lunghezza del raggio di tale circonferenza. Una faccia del cartellone (un lato dell'esagono nella figura) è visibile da Michela quando lei si trova nel semipiano che ha come origine la retta determinata dalla faccia del cartellone e che non contiene l'esagono. Tracciando i prolungamenti di ciascun lato, si determinano sulla circonferenza due tipi di archi: quelli nei quali Michela vede 3 cartelloni e quelli in cui vede 2 cartelloni, ad esempio nell'arco AB vede 2 cartelloni. La condizione che la velocità di rotazione sia costante diventa la richiesta che la lunghezza degli archi in cui si vedono 3 cartelloni sia uguale a quella degli archi dove se ne vedono 2, in figura gli archi AB e BC hanno la stessa lunghezza ed le corde corrispondenti sono uguali. La corda AB ha la stessa lunghezza del segmento EG, cioè $\sqrt{3}$m. Quindi il triangolo equilatero BCD ha lato $\sqrt{3}$m, perciò $HD = \frac{3}{2}$m. Anche i triangoli DEF e EFO sono equilateri, di lato 1m, da cui $OD = \sqrt{3}$m. Dato che il triangolo HOC è rettangolo,



$$OC = \sqrt{(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\sqrt{3} + \tfrac{3}{2})^2} = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}} = \sqrt{3}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$
$$= \sqrt{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 3,34\text{m}.$$